GRUNDLAGEN DER FUNKTIONALANALYSIS

R.WEISSAUER

Metrische Räume

Ein **metrischer Raum** (X, d) ist eine Menge X mit einer Distanzfunktion

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \ ,$$

welche folgende Eigenschaften besitzt

- (Distanzeigenschaft) $d(x, x') = 0$ genau dann wenn $x = x'$.
- (Symmetrie) $d(x, x') = d(x', x)$.
- (Dreiecksungleichung) $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ für alle x, x', x'' in X.

Die Dreiecksungleichung impliziert die Vierecksungleichung

$$|d(x, x') - d(y, y')| \ \leq \ d(x, y) + d(x', y') \ .$$

Topologie. Die **offenen Kugeln** $K_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ mit Radius $r \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$ definieren die Basis einer Topologie auf X. Man zeigt leicht: Eine Menge $U \subseteq X$ ist offen bezüglich dieser Topologie, wenn gilt: $x \in U \Longrightarrow \exists r > 0$ mit $K_r(x) \subseteq U$. Eine Folge $x_n \in X$ **konvergiert** gegen einen Grenzwert $x \in X$ genau dann wenn die reelle Folge $d(x, x_n)$ eine Nullfolge ist. Wegen der Dreiecksungleichung ist der Grenzwert konvergenter Folgen eindeutig bestimmt.

Cauchyfolgen. Eine Folge $x_n \in X$ heisst Cauchyfolge (kurz CF), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N existiert mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m > N$. Jede konvergente Folge ist eine CF. Jede CF ist beschränkt, d.h. enthalten in einer Kugel $K_r(x_0)$.

Produkte. Das cartesische Produkt zweier metrischer Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) ist der Raum $X \times Y$ mit der **Produktmetrik** $d((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$.

Teilräume. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Dann definiert die **Teilraummetrik** $d_Y = d_X|_{Y \times Y}$ einen metrischen Raum (Y, d_Y). Eine Teilmenge Y heisst **abgeschlossen** im metrischen Raum (X, d_X), wenn gilt: Für jede Folge $x_n \in Y$, welche in (X, d_X) gegen x konvergent, gilt $x \in Y$. Der **Abschluss** $\overline{Y}$ einer Teilmenge Y ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ welche Y enthält, also der Durchschnitt aller abgeschlossenen Y mit $A \subseteq Y \subseteq X$. Man sagt, eine Teilmenge Y liegt **dicht** in X, wenn ihr Abschluss gleich X ist.

Stetigkeit. Eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ heisst **stetig im Punkt** x, wenn für jede in (X, d_X) konvergente Folge x_n mit Grenzwert x gilt, dass $f(x_n)$ gegen $f(x)$ in (Y, d_Y) konvergiert. Äquivalent dazu ist

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0 \ \forall x' \in X \ \big(d_X(x', x) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon\big) \ .$$

Dies zeigt man wie in der Analysisvorlesung. Die Abbildung f heisst **stetig**, wenn sie in allen Punkten x in X stetig ist. Äquivalent dazu ist, dass die Urbilder $f^{-1}(V)$ beliebiger offener Mengen V in Y offen in X sind. $C(X)$ bezeichne den Raum der stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf (X, d).

Eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ heisst **gleichmässig stetig**, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0 \ \forall x, x' \in X \ \big(d_X(x', x) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon\big) \ .$$

Beispiele für gleichmässig stetige Abbildungen sind **Isometrien**, d.h. Abbildungen mit der Eigenschaft $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ für alle x, x' in X.

Beispiel. Für $A \subseteq X$ definiert $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ eine Funktion auf X mit Werten in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Wenn A abgeschlossen in (X, d) ist, gilt $d(x, A) = 0$ genau dann wenn $x \in A$. Die so definierte Funktion $d(., A)$ ist gleichmässig stetig auf X, denn

$$|d(y, A) - d(x, A)| \leq d(x, y) \ .$$

[Wähle $a_n \in A$ mit $d(x, A) \leq d(x, a_n) < d(x, A) + 1/n$. Aus $d(y, A) \leq d(y, a_n) \leq d(y, x) + d(x, a_n) < d(x, y) + d(x, A) + 1/n$ folgt $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ im Limes $n \to \infty$. Vertauscht man x, y, folgt die Behauptung.]

Definition. Ein metrischer Raum heisst **vollständig**, wenn jede CF in X konvergiert.

Der Euklidsche Raum mit der Euklidschen Metrik ist vollständig. Das Produkt vollständiger Räume ist wieder vollständig, wie man leicht sieht.

Lemma. *Sei $A \subseteq X$ und (X, d_X) sei ein vollständiger metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(1) *A ist abgeschlossen in X*
(2) *A ist vollständig bzgl. der Teilraummetrik.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2). Ist A abgeschlossen in X und $a_n \in A$ eine CF in (A, d_A) und damit (X, d_X), dann konvergiert a_n gegen ein $x \in X$, da (X, d_X) vollständig ist. Da A abgeschlossen ist, folgt $a \in A$. (2) $\Longrightarrow$ (1). Sei umgekehrt a_n eine Folge in A, welche gegen x in (X, d_X) konvergiert. Da (A, d_A) vollständig ist, konvdergiert die Folge a_n auch gegen einen Grenzwert $a \in A$. Da der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist, folgt $x = a \in A$. QED

Hausdorff Vervollständigung

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir suchen einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X},\hat{d})$ zusammen mit einer isometrischen Abbildung

$$i:(X,d)\hookrightarrow(\hat{X},\hat{d})$$

derart dass das Bild $i(X)$ von X **dicht** in $(\hat{X},\hat{d})$ liegt. Das Datum $(\hat{X},\hat{d},i)$ nennt man eine **Vervollständigung** des metrischen Raumes (X,d).

Eine solche Vervollständigung konstruiert man wie folgt

$$\boxed{\hat{X} \ = \ \{CF\ in\ (X,d)\}/\sim}$$

bezüglich der folgenden **Äquivalenzrelation** auf der Menge der CF in (X,d):

$$(x_n)\sim(x_n') \iff d(x_n,x_n') \text{ ist eine reelle Nullfolge.}$$

Man konstruiert $\hat{d}:\hat{X}\times\hat{X}\to\mathbb{R}$ durch den Ansatz

$$\boxed{\hat{d}(x,y) \ = \ \lim_n d(x_n,y_n)}$$

für CF $x=(x_n)$ und $y=(y_n)$ in (X,d). Man muss dann zeigen

(1) $d(x_n,y_n)$ ist konvergent in $\mathbb{R}$
(2) $\hat{d}(x,y)$ hängt nur ab von der Äquivalenzklasse von x resp. y
(3) $\hat{d}$ definiert eine Metrik
(4) $i(x):=$ konstante Folge x definiert eine Isometrie $i:(X,d)\to(\hat{X},\hat{d})$.
(5) $i(X)$ liegt dicht in $(\hat{X},\hat{d})$.
(6) $(\hat{X},\hat{d})$ ist vollständig

Beweise. (1) folgt aus der Vierecksungleichung $|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\leq d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)<2\varepsilon$ für $n,m>N(\varepsilon)$, da x,y CF. (2) $|d(x_n,y_n)-d(x_n',y_n)|\leq d(x_n,x_n')+0<\varepsilon$ für $n>N(\varepsilon)$, falls $x\sim x'$. (3) Offensichtlich ist $\hat{d}$ symmetrisch und die Dreiecksungleichung überträgt sich durch Limesbildung. Aus $\hat{d}(x,y)=0$ folgt $d(x_n,y_n)\to 0$ und damit per Definition $x\sim y$, also die Distanzeigenschaft. (4) Offensichtlich gilt $d(x,y)=\hat{d}(x,y)$ für Punkte x,y aus X. (5) Die Klasse der CF $x=(x_n)$ in $\hat{X}$ ist der Limes der Folge $i(x_1),i(x_2),..\in\hat{X}$, denn $\hat{d}(x,i(x_n))=\lim_m d(x_m,x_n)\leq\varepsilon$ für n (und m) grösser als $N(\varepsilon)$. Es bleibt also (6)

Vollständigkeit von $(\hat{X},\hat{d})$. Sei dazu $x^{(1)},x^{2)},...$ eine CF in $(\hat{X},\hat{d})$. Zur Erinnerung: Jedes der $x^{(k)}\in\hat{X}$ ist dabei per Definition eine Äquivalenzklassen von CF in (X,d). Anstatt mit Äquivalenzklassen zu rechnen, rechnen wir mit geeigneten Repräsentanten.

Wir stellen uns also $x^{(k)}$ als eine CF in X vor und wählen den Repräntanten in seiner Klasse so, dass gilt (*)

$$x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \quad , \quad d(x_n^{(k)}, x_m^{(k)}) < 1/k \quad (\forall\ m,n)\ .$$

[Eigentlich gilt das a priori nur für alle $m, n \geq N(k)$. Aber man kann zu einer Teilfolge übergehen, etwa durch Weglassen der ersten $N(k)$ Folgenglieder. Diese Teilfolge ist in der selben Äquivalenzklasse]. Mit Hilfe der Präparation (*) ist die Diagonalfolge

$$\hat{x} := (\hat{x}_n) \quad , \quad \hat{x}_1 := x_1^{(1)}, \hat{x}_2 := x_2^{(2)}, ...$$

eine CF in (X,d). In der Tat gilt $d(\hat{x}_n, \hat{x}_m) = d(x_n^{(n)}, x_m^{(m)}) \leq d(x_n^{(n)}, x_k^{(n)}) + d(x_k^{(n)}, x_k^{(m)}) + d(x_k^{(m)}, x_m^{(m)})$ für alle k. Ist k gross, gilt $d(x_k^{(n)}, x_k^{(m)}) < \varepsilon/3$. Ist n gross, gilt $d(x_n^{(n)}, x_k^{(n)}) < \varepsilon/3$ und ditto für $d(x_k^{(m)}, x_m^{(m)})$ auf Grund von (*). Also definiert die Klasse von $\hat{x}$ einen Punkt in $\hat{X}$.

Behauptung. Es gilt $\lim_k x^{(k)} \ = \ \hat{x}$ im metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$.

Beweis. $\hat{d}(\hat{x}, x^{(k)}) = \lim_n d(x_n^{(n)}, x_n^{(k)})$. Beachte $d(x_n^{(n)}, x_n^{(k)}) \leq d(x_n^{(n)}, x_k^{(k)}) + d(x_k^{(k)}, x_n^{(k)})$ und $d(x_n^{(n)}, x_k^{(k)}) \to 0$ für $n, k \to \infty$ (da $\hat{x}$ CF). Wegen $d(x_k^{(k)}, x_n^{(k)}) < 1/k$ geht der zweite Ausdruck gegen Null für $k \to \infty$. Es folgt $\lim_k d(\hat{x}, x_n^{(k)}) = 0$, also $\hat{x} = \lim_k x^{(k)}$ in $(\hat{X}, \hat{d})$. QED

Fortsetzungssatz. *Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine gleichmässig stetige Abbildung. Dann existiert eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $f : (\hat{X}, \hat{d}_X) \to (\hat{Y}, \hat{d}_Y)$, welche das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{Y} \\ X \arrow[u, hook, "i"'] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beweis. Für eine CF x_n in (X, d_X) ist $y_n := f(x_n)$ eine CF in (Y, d_Y). In der Tat gilt $d_Y(y_n, y_m) \leq \varepsilon$ für $d_X(x_n, x_m) < \delta(\varepsilon)$ wegen der gleichmässigen Stetigkeit von f, und letzteres gilt für $n, m > N(\delta(\varepsilon))$. Setze damit $\hat{f}(x) := y$ für die Äquivalenzklasse x der CF (x_n). Dies ist wohldefiniert: Gilt $x' = (x'_n) \sim x = (x_n)$, dann folgt $y' = (f(x'_n)) \sim y = (f(x_n))$, denn der selbe Schluss führt $\lim_n d_Y(f(x'_n), f(x_n)) = 0$ mittels der gleichmässigfen Stetigkeit auf $\lim_n d_X(x'_n, x_n) = 0$ zurück. Die Fortsetzung $\hat{f}$ ist durch das Diagram eindeutig festgelegt, wenn sie stetig ist (Dichtigkeit von $i(X)$ in $\hat{X}$). Die Stetigkeit von $\hat{f}$ zeigt man wieder durch einen Diagonalfolgenschluss. Die Details seien dem Leser überlassen. QED

Der Satz von Baire

Seien $E_n = E_{r_n}(x_n) = \{x \in X \ | d(x, x_n) \leq r_n\}$ abgeschlossene Kugeln eines metrischen Raumes (X, d) mit Radien $r_n \geq 0$ und der Eigenschaft:

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$$

Intervallschachtelungs-Prinzip. *Ist (X, d) vollständig und gilt $\lim_n r_n = 0$, dann ist der Durchschnitt dieser Kugeln nichtleer und besteht aus einem einzigen Punkt $x \in X$*

$$\{x\} \; = \; \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \; .$$

Beweis. Für die Mittelpunkte gilt $d(x_n, x_m) \leq r_n$ für $m \geq n$ wegen $x_n, x_m \in E_n$. Somit ist x_n eine CF. Sei x ihr Grenzwert. Dann gilt $d(x, x_n) \leq r_n$ wegen $d(x_m, x_n) \leq r_n$ (bilde den Limes über m $(m \geq n)$. Also liegt x im Durchschnitt aller Kugeln E_n. Für y im Durchschnitt folgt $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq 2r_n$. Im Limes $d(x, y) = 0$, also $x = y$. QED

Satz von Baire. *Sei (X, d) vollständig. Enthält eine abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ abgeschlossener Teilmengen $A_n \subseteq X$ eine offene nichtleere Kugel $K_{r_1}(x_1)$, dann enthält bereits eines der A_n eine nichtleere offene Kugel V.*

Beweis. Falls dies nicht richtig wäre, wäre der Durchschnitt von $K_{r_1}(x_1)$ mit $X \setminus A_1$ offen und nichtleer, enthält damit selbst eine offene Kugel $K_{r_2}(x_2)$ (oBdA mit $r_2 < r_1/2$) sowie auch (oBdA durch Verkleinern von r_2) deren Abschluß $E_{r_2}(x_2)$. Wiederhole den Vorgang für $X \setminus A_2$ und $K_{r_2}(x_2)$. Dann ist $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{r_n}(x_n) \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ nach Iteration. Wegen $x \in K_{r_1}(x_1)$ ein Widerspruch zur Annahme. QED

Beispiel. Ist $\mathbf{F}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$, dann ist

$$A_n = \{x \in X \mid f(x) \leq n \; , \; \forall f \in \mathbf{F}\} = \bigcap_{f \in \mathbf{F}} f^{-1}((-\infty, n])$$

abgeschlossen in X und die Vereinigung dieser A_n ist ganz X. Es folgt

Satz. *Ist $\mathbf{F}$ punktweise beschränkt, d.h $\{f(x), f \in \mathbf{F}\}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$ für alle $x \in X$, dann existiert eine offene Kugel V in X und eine Konstante C mit*

$$f(x) \leq C \quad , \quad \forall \; x \in V, \; f \in \mathbf{F} \; .$$

Kompakte metrische Räume

In metrischen Räumen (X,d) gilt das Hausdorffsche Trennungsaxiom, denn Punkte $x \neq y$ in X können durch offene Kugeln vom Radius $0 < r < \frac{1}{2}d(x,y)$ getrennt werden.

Satz. *Ein metrischer Raum (X,d) ist überdeckungskompakt (1) genau dann wenn (X,d) folgenkompakt (2) ist. Äquivalent dazu ist (3): (X,d) ist vollständig und präkompakt*[1].

Bemerkung 1. Bekanntlich ist (1) äquivalent zu Cantors Kriterium (1)': Ein Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen von X ist nichtleer, wenn alle endlichen Teildurchschnitte nicht leer sind [Zum Beweis betrachte die Komplemente endlicher offener Teilüberdeckungen von X]. Gilt (1) für X, dann auch für abgeschlossene Teilmengen A.

Bemerkung 2. Aus der Präkompaktheit eines metrischen Raumes X folgt die Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge in X [nämlich die Vereinigung für $n = 1, ...,$ der Mittelpunkte endlicher Überdeckungen durch Kugeln vom Radius $1/n$.]

Beweis des Satzes. Aus (3) folgt (2) leicht durch einen Schubfachschluss. Aus (2) folgt umgekehrt die Vollständigkeit[2] und damit (3), denn gäbe es für ein $\varepsilon > 0$ keine endliche Überdeckung von X durch Kugeln vom Radius ε, dann gibt es für je endlich viele Punkte $x_1, ..., x_n \in X$ eine Punkt $x_{n+1} \in X$ mit $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ für alle $i = 1, .., n$ und dies würde eine Folge in X ohne konvergente Teilfolge definieren.

Aus (2) folgert man leicht die Aussage (1)' für abzählbare Durchschnitte und damit (1) für abzählbare Vereinigungen. Wegen (2) $\Longrightarrow$ (3) kann man aber mit Hilfe der Bemerkung 2 eine beliebige offene Überdeckung von X zu einer abzählbaren offenen Teilüberdeckung ausdünnen. Somit folgt (1) aus (2). Aus (1) schiesslich folgt (2) wie folgt: Für eine Folge $x_n \in X$ ohne konvergente Teilfolge gäbe es für jedes $x \in X$ eine offene Kugel $K(x)$ um, welches unter den Folgengliedern als Element höchstens x besitzt. Somit ist $A = \{x_1, x_2, ...\}$ abgeschlossen in X, denn das Komplement von A ist die offene Menge $\bigcup_{x \notin A} K(x)$. OBdA also $X = A$. Somit ist X diskret und überdeckungskompakt, also endlich. Ein Widerspruch, da dann nach dem Schubfachprinzip eine konvergente Teilfolge existieren müsste. QED

Bemerkung 3. Ein metrischer Raum (X,d) heisst *abzählbar kompakt*, wenn X sich als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen schreiben lässt. Aus Bemerkung 2 folgt für solche Räume X die Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge in X.

Ist X kompakt, definiert $d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ eine Metrik auf dem Raum stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen $C(X)$ und $C(X)$ ist Cauchy vollständig. Sei $\|f\|_\infty = d_\infty(f,0)$.

---

[1] X heisst präkompakt, wenn für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von X durch offene Kugeln vom Radius $< \varepsilon$ existiert.

[2] denn eine CF mit einer gegen $x \in X$ konvergenten Teilfolge konvergiert gegen x. Dies folgt unmittelbar aus der Dreiecksungleichung.

Stone-Weierstraß

Sei X ein metrischer Raum. Ein **Verband** B ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von Funktionen $X \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(x) \in B \Longrightarrow |f(x)| \in B$. Wegen $\max / \min(f,0) = \frac{1}{2}(f \pm |f|)$ sowie $\max / \min(f,g) = g + \max / \min(f-g,0)$ ist B unter der Bildung endlicher Minima und Maxima abgeschlossen.

Beispiel. $C(X)$ ist ein Verband. Die stetigen Funktionen $C_A(X) \subseteq C(X)$ mit Träger in einer Teilmenge $A \subseteq X$ bilden einen Verband.

Sei B ein Verband mit folgender Eigenschaft (*):

- Für je zwei Punkte $x \neq y$ in X und reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $f_{x,y} \in B$ mit der Eigenschaft $f_{x,y}(x) = a$ und $f_{x,y}(y) = b$ so daß $f_{x,y}$ stetig ist in einer Umgebung von x und y.

Ist B in $C(X)$ enthalten, ist natürlich $f_{x,y}$ automatisch stetig.

Lemma. *Sei B ein Verband auf X mit der Eigenschaft (*), X kompakt und g eine stetige Funktion auf X. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $f \in B$ mit der Eigenschaft $d_\infty(g,f) < \varepsilon$. Ist $g \geq 0$, kann $f \geq 0$ gewählt werden.*

Beweis. Für $x \neq y \in X$ existiert ein $f_{x,y} \in B$ mit $f_{x,y}(x) = g(x)$ und $f_{x,y}(y) = g(y)$. Für festes x existiert zu jedem y eine offene Umgebung $V(y)$ mit $sup_{y' \in V(y)} |f_{x,y}(y') - g(y')| < \varepsilon$, da g und $f_{x,y}$ bei y stetig sind. Endlich viele $V(y_1), .., V(y_m)$ der $V(y)$ überdecken X. Das Infimum $f_x := \inf(f_{x,y_1}, \cdots, f_{x,y_m})$ ist in B (wegen der Verbandseigenschaft) und stetig in einer Umgebung von x mit

$$f_x(x) = g(x) \quad , \quad f_x(y) < g(y) + \varepsilon \quad (\forall y \in X) \ .$$

Für jedes x gibt es analog eine offene Umgebung $U(x)$ mit $sup_{x' \in U(x)} |g(x') - f_x(x')| < \varepsilon$. Endlich viele $U(x_1), .., U(x_n)$ überdecken X. Für $f = \sup(f_{x_1}, \cdots, f_{x_n}) \in B$ folgt

$$f(x) > g(x) - \varepsilon \quad , \quad f(y) < g(y) + \varepsilon \quad (\forall\ x, y \in X) \ ,$$

also $d_\infty(f,g) < \varepsilon$. Ersetze f durch $\max(f,0)$ im Fall $g = \max(g,0) \geq 0$. QED

Satz. *Sei X kompakt und $A \subseteq C(X)$ eine $\mathbb{R}$-**Unteralgebra** von $C(X)$ mit 1. Existiert für jedes Paar $x \neq y$ in X ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$ (**Punktetrennung**), dann liegt A dicht in $C(X)$. (Im Fall $A \subseteq C(X, \mathbb{C})$ fordert man noch $f \in A \Longrightarrow i \cdot f \in A$ und $\overline{f} \in A$).*

Beweis. Der Abschluß $\overline{A}$ von A in $C(X)$ (Cauchy Komplettierung) ist wieder eine Algebra und enthält A, ist also punktetrennend. ObdA ist daher A abgeschlossen in $C(X)$. Wegen des letzten Lemmas genügt es zu zeigen: A ist ein Verband, d.h. $f \in A \Longrightarrow |f| \in A$. Also genügt es aus $0 \leq h = f^2 \in \overline{A}$ eine positive Wurzel $_+\sqrt{h} \in A$ ziehen zu können. Im Fall $0 < c_1 \leq h \leq c_2 < 1$ gilt $h = 1 - g$ mit $\|g\|_\infty < 1$ und die Taylorentwicklung $\sqrt{h} = 1 - \frac{1}{2}g + \cdots$ konvergiert in $A \subseteq C(X)$. Ersetzt man die beschränkte Funktion h durch $c \cdot (h + d)$ mit kleinen positiven Konstanten c, d, kann man also die Wurzel in A ziehen. Da c eine Wurzel besitzt, gilt $\sqrt{h+d} \in A$. Im Limes $d \to 0$ folgt $\sqrt{h} \in A$. QED

Lokalkompakte metrische Räume

Sei $\mathcal{K}$ eine Kollektion von Teilmengen von X.

Durchschnitts-Lemma. *Der von charakteristischen Funktionen χ_K der endlichen Durchschnitte K von Mengen in $\mathcal{K}$ erzeugte $\mathbb{R}$-Vektorraum B ist ein Verband. Ist $\mathcal{K}$ abzählbar, hat B ein abzählbares Erzeugendensystem.*

Beweis. OBdA $\#\mathcal{K} = n < \infty$. Für $I \subseteq \{1,...,n\}$ sei $K(I) = \bigcap_{i\in I} K_i$. Jedes $f \in B$ hat die Gestalt $f(x) = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,...,n\}} c_I \cdot \chi_{K(I)}(x)$ oder alternativ die Gestalt $f(x) = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,...,n\}} d_I \cdot \chi_{M(I)}(x)$ für die 2^n <u>disjunkten</u> Mengen $M(I) = \bigcap_{i\in I} K_i \cap \bigcap_{i\notin I} K_i^c$. Umgekehrt ist jedes $\chi_{M(I)}(x)$ in B. Dies zeigt man durch Induktion nach n (Übungsaufgabe). Der Fall $n = 2$ ist klar. Der Übergang von $f(x)$ zu $|f(x)|$ entspricht dem Übergang von d_I zu $|d_I|$. Daraus folgt die Verbandseigenschaft. Der Rest ist klar. QED

Folgerung. *Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $K(X)$, erzeugt von den charakteristischen Funktionen der kompakten Teilmengen E eines metrischen Raumes (X,d), ist ein Verband.*

(X,d) heisst **lokalkompakt**, wenn es zu jedem Punkt $\xi \in K$ eine offene Kugel $K_r(\xi)$ vom Radius $r > 0$ gibt, die in einer kompakten Menge K enthalten ist. Damit ist die abgeschlossene Kugel $E(\xi) \subset K_r(\xi)$ vom halben Radius $r(\xi) = r/2$ kompakt.

Beispiel. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist abzählbar kompakt, aber nicht lokalkompakt. Ein lokalkompakter metrischer Raum besitzt eine abzählbar dichte Teilmenge genau dann, wenn er abzählbar kompakt ist. Jede offene Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt und besitzt eine abzählbar dichte Teilmenge, ist daher abzählbar kompakt.

Ist (X,d) lokal kompakt, erfüllt der Verband $K(X)$ Eigenschaft (*) des letzten Abschnitts.

Korollar. *Auf einem lokal kompakten metrischen Raum X kann jede Funktion $f \in C_c(X)$ beliebig gut in der d_∞-Metrik durch eine Funktion in $K(X)$ approximiert werden.*

Die Umkehrung gilt auch, wenn man den Begriff der Approximation modifiziert. Dies ist notwendig, denn in der Regel sind ja die Funktionen $\chi_E \in K(X)$ unstetig, und eine unstetige Funktion kann nicht durch eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen approximiert werden. Ersetzt man gleichmässige Konvergenz (d.h. d_∞-Konvergenz) durch monotone Konvergenz, erhält man folgende Umkehrung.

Lemma. *Sei (X,d) lokalkompakt und $K \subseteq X$ kompakt. Dann existiert $A \subseteq X$ kompakt und eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen $\chi_{K,n}$ mit Träger in A, welche punktweise gegen die charakteristische Funktion χ_K von K konvergiert.*

Beweis. Überdecke K durch die offenen Kugeln $K_{r(\xi)}(\xi)$ für $\xi \in K$. K ist kompakt ist, also $K \subset U = \bigcup_{\xi\in I} K_{r(\xi)}(\xi)$ (I endlich). U ist offen, $A := \bigcup_{\xi\in I} E(\xi)$ ist kompakt mit

$$K \subset U \subset A$$

sowie $d := \min_{a\in A\setminus U}(d(a,K)) > 0$. Nach Wahl von d haben die stetigen Funktionen

$$\chi_{K,n} = \max\Big(0, 1 - \frac{d(x,K)}{d}\Big)^n \in C_A(X) \subseteq C_c(X)$$

ihren Träger in A und konvergieren punktweise monoton fallend gegen χ_K. QED

Lemma 2. *Mit obigen Bezeichnungen gibt es einen abzählbar erzeugten Untervektorraum von $C_A(X)$, dessen Einschränkung auf K dicht liegt in $C(K)$ bezüglich d_∞.*

Beweis. Überdecke K durch endlich (!) viele der kompakten Kugeln $E(\xi) \subset K$ vom Radius $\leq 1/n$. Sei M_n die Menge dieser Kugeln, dann ist $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ abzählbar. Die Menge $\mathcal{K}$ der endlichen Durchschnitte E von Mengen aus M ist abzählbar.

Jedes $f \in C(K)$ ist gleichmässig stetig: Für $\varepsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, falls $d(x,y) < 1/n$. Daher kann $f \in C(K)$ in der $\|.\|_\infty$-Norm durch die Funktionen in dem Verband $\bigoplus_{E\in\mathcal{K}} \mathbb{R}\cdot\chi_E$ beliebig gut approximiert werden. Jedes $\chi_E \in L^\infty(X)$ wird in der $\|.\|_\infty$-Norm beliebig gut durch die Funktionen $\chi_{E,n}$ approximiert. Somit erzeugen die abzählbar vielen $\chi_{E,n} \in C_A(X)$ für $E \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$ eingeschränkt von X auf K einen dichten Unterraum von $C(K)$. QED

Sei $C_c(X) = \bigcup_{A\ kompakt} C_A(X)$ der Verband der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Ein **Radon Integral** I auf einem lokalkompakten metrischen Raum X ist dann per Definition eine monotone $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $I : C_c(X) \to \mathbb{R}$.

Lemma. *Ein Radon Integral I definiert ein Integral auf dem Verband $B = C_c(X)$.*

Beweis. Hat $f \in C_c(X)$ Träger in der kompakten Menge K, dann folgt aus der Monotonie des Radon Integrals $|I(f)| = |I(f_+) - I(f_-)| \leq max(|I(f_\pm)|) \leq I(\varphi_K)\cdot\|f\|_\infty$. Hier sei φ_K eine beliebige Funktion in $C_c(X)$ mit der Eigenschaft $\varphi_K \geq 0$ und $\varphi_K = 1$ auf K, z.B also $\varphi_K = \chi_{K,n}$. Für jede monoton fallende Folge $f_n \in C_c(X)$, die punktweise gegen eine Funktion $f \in C_c(X)$ konvergiert, haben die Funktionen f_n ihren Träger in der kompakten Menge $K = supp(f_1 - f) \cup supp(f)$. Aus dem Satz von Dini folgt daher $\lim_n \|f - f_n\|_\infty$. Die obige Abschätzung $|f - f_n\| \leq I(\varphi_K)\cdot\|f - f_n\|_\infty$ zeigt daher $\lim_n |I(f) - I(f_n)| = 0$. Also ist I ein Integral auf $B = C_c(X)$. QED

Es folgt $\chi_K \in B^-_{fin}$ wegen $0 \leq vol_I(K) := I^-(\chi_K) = \lim_n I(\chi_{K,n}) < \infty$ und $\chi_{K,n} \searrow \chi_K$. Die Abschätzung im obigen Beweis impliziert dann sogar

Lemma. *Ist f eine stetige Funktion mit Träger in der kompakten Menge K und I ein Radon Integral auf X, dann gilt*

$$|I(f)| \leq vol_I(K)\cdot\|f\|_\infty \ .$$

Normierte Räume

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Funktion

$$\|.\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

heisst **Norm**, falls gilt

- $\|v\| = 0$ genau dann wenn gilt $v = 0$.
- $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V$.
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Bemerkungen 1) Die Einschränkung einer Norm auf einen $\mathbb{R}$-linearen Teilraum definiert wieder einen normierten Raum. Zwei Normen $\|.\|, \|.\|'$ heissen äquivalent, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt mit $c_1\|v\| \leq \|v\|' \leq c_2\|v\|$. Äquivalente Normen definieren dieselbe Topologie auf V; die Umkehrung davon gilt auch.

2) Das Produkt $V = V_1 \times V_2$ (oder $V_1 \oplus V_2$) zweier normierter Räume $(V_i, \|.\|_i)$ ist wieder ein normierter Raum mit der **Produktnorm** $\|(v_1, v_2)\| = \|v_1\|_1 + \|v_2\|_2$.

3) Die Abbildung $d(v, w) = \|v - w\|$ definiert eine Metrik auf V.

4) Ein normierter Raum ist ein Vektorraum V mit einer Metrik d derart dass gilt

$$d(\varphi(v), \varphi(w)) = |\varphi| \cdot d(v, w)$$

für alle $v, w \in V$ und alle Abbildungen $\varphi(v) = \lambda \cdot v + v_0$, $v_0 \in V$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Man nennt $|\varphi| = |\lambda|$ den Modulus von φ. Die Isomorphismen $\varphi : V \to V$ sind gleichmässig stetige Automorphismen von V.

5) Die Addition $+ : V \times V \to V$ ist gleichmässig stetig (Dreiecksungleichung).

6) Wegen 4),5) setzen sich die Skalarmultiplikation $\varphi(v) = \lambda v$ und die Addition zu stetigen Abbildungen der Komplettierung $\hat{V}$ von V fort. Man sieht daher leicht: Die metrische Komplettierung $\hat{V}$ eines normierten Raumes definiert wieder einen normierten Raum. Dieser ist vollständig, d.h. jede CF in $\hat{V}$ konvergiert in $\hat{V}$.

7) *Die Vollkugel* $E = \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$ *ist konvex wegen der Dreiecksungleichung:* $v, w \in E \Longrightarrow t \cdot v + (1 - t) \cdot w \in E$ *für alle* $t \in [0, 1]$. *Ausserdem gilt* $E = -E$ *und* $E \cap L$ *ist abgeschlossen für jede Gerade* L *durch den Nullpunkt mit* $E \cap L \neq \{0\}, L$. E bestimmt die Punkte mit Norm 1 und damit die Norm. Umgekehrt definiert jede Teilmenge $E \subset V$ mit den oben genannten Eigenschaften eine Norm $\|.\|$ auf V. [Für $x = \|x\| \cdot v$ und $y = \|y\| \cdot w$ mit $v, w \in E$ setze $t = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} \in [0, 1]$. Dann folgt $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ aus $v, w \in E \Longrightarrow t \cdot v + (1 - t) \cdot w \in E$].

Definition. *Ein* **Banachraum** *ist ein vollständiger normierter Raum.*

Lemma. *Die Komplettierung* $\hat{V}$ *eines normierten Raumes* V *ist ein Banachraum.*

Beweis. Bemerkung 6). QED

Der Dualraum X^*

Seien X und Y normierte Räume und sei $L(X,Y)$ der Raum aller stetigen $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $F: X \to Y$. Bezeichnung: $K_r(x_0) := \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\}$.

Lemma. *Für eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $F: X \to Y$ sind äquivalent*

(1) *F ist stetig*
(2) *F ist stetig in einem Punkt*
(3) *F ist stetig im Nullpunkt*
(4) *Es gibt eine reelle Konstante C mit $\|F(x)\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X$ für alle $x \in C$*
(5) *F ist gleichmässig stetig.*

Beweis. Ist F stetig im Punkt x_0, dann auch im Punkt Null. [Betrachte dazu $f(x) = f(x+x_0) - f(x_0)$ für x nahe bei Null.] Ist F stetig im Nullpunkt, gibt es für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $F(K_\delta(0)) \subset K_\varepsilon(0)$. Also gilt $\|F(x)\| \leq C \cdot \|x\|$ für jedes $C > \frac{\varepsilon}{\delta}$. Die Implikationen $(4) \Longrightarrow (5) \Longrightarrow (1) \Longrightarrow (2)$ sind trivial. QED

Für $F \in L(X,Y)$ ist damit die **Operatornorm**

$$\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|F(x)\|_Y}{\|x\|_X} < C$$

wohldefiniert. Es gilt für alle x in X

$$\boxed{\|F(x)\| \ \leq \|F\| \cdot \|x\|}\ ,$$

und daraus folgt $\|F \circ G\| \leq \|F\| \cdot \|G\|$.

Lemma. *Der Operatornorm definiert eine Norm auf $L(X,Y)$. Ist Y vollständig, so ist $L(X,Y)$ vollständig.*

Beweis. $\|F+G\| = sup_{\|x\|=1} \|(F+G)(x)\| = sup_{\|x\|=1}(\|F(x)+G(x)\| \leq sup_{\|x\|=1}\|F(x)\| + sup_{\|x\|=1}\|G(x)\| = \|F\| + \|G\|$. Also ist $L(X,Y)$ ein normierter Raum.

Für eine CF F_n in $L(X,Y)$ gilt $\|F_n\| < C$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Dann ist $F_n(x)$ eine reelle CF für festes $x \in X$ wegen $\|F_n(x) - F_m(x)\| \leq \|x\| \cdot \|F_n - F_m\| < 2C\|x\|$. Ist Y vollständig, existiert $\lim_n F_n(x)$ für jedes festes x, da $F_n(x)$ eine CF in Y ist. Offensichtlich ist $F(x) := \lim_n F_n(x)$ linear in der Variable x. Um zu zeigen, dass F stetig ist, benutze

$$\|F_n(x)\| \leq \|F_n\| \cdot \|x\| \leq C \cdot \|x\|$$

und im Limes (Stetigkeit von $\|.\|$ und F_n)

$$\|F(x)\| = \|\lim_n F_n(x)\| = \lim_n \|F_n(x)\| \leq C \cdot \|x\|\ .$$

Somit ist F stetig mit Norm $\|F\| \leq C$. Aus $\|(F_m - F_n)x\| \leq \varepsilon\|x\|$ für n, m gross genug folgt im Limes $m \to \infty$ dann $\|F - F_n\| \leq \varepsilon$, für n gross genug. QED

Korollar. *Für einen normierten Raum X ist X^* vollständig bezüglich der Operatornorm.*

Gleichmässige Beschränktheit

Satz (Banach-Steinhaus). *Sei X ein Banachraum, sei Y ein normierter Raum und $\mathbf{F} \subset L(X,Y)$ eine Menge stetiger linearer Abbildungen. Dann gilt: Ist $\mathbf{F}$ punktweise beschränkt*

$$\{\|F(x)\|_Y, F \in \mathbf{F}\} \text{ ist beschränkt in } Y \text{ für alle } x \in X,$$

dann ist $\mathbf{F}$ (Operatornorm)-beschränkt

$$\{\|F\|, F \in \mathbf{F}\} \text{ ist beschränkt in } \mathbb{R} \ .$$

Beweis. Aus dem Satz von Baire folgt: $\exists U \subset X$ offen mit $\mathbf{F}(U)$ beschränkt und damit enthalten in einer Kugel $K_R(0)$. Wähle $K_r(x_0) \subset U$. Es folgt $\mathbf{F}(K_r(0)) \subset \mathbf{F}(U) - \mathbf{F}(x_0) \subset K_c(0)$ für $c = R + sup_{F\in\mathbf{F}}\|F(x_0)\|_Y$. Also $\|F\| \leq c/r < \infty$ für alle $F \in \mathbf{F}$. QED

Satz von der offenen Abbildung. *Sei $F : X \to Y$ stetig linear mit*

(1) *X, Y vollständig*
(2) *F surjektiv.*

Dann ist F eine offene Abbildung. Insbesondere ist F ein Homöomorphismus[3], wenn F bijektiv ist.

Beweis. Schritt 1) Für festes $0 \in W$ offen in X gilt $X = \bigcup_{n=1}^\infty n \cdot W$. Aus $Y = F(X)$ folgt daher $Y = \bigcup_{n=1}^\infty n \cdot F(W)$ und damit $Y = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ für die abgeschlossenen Mengen $A_n = n \cdot \overline{F(W)}$ in X.

Schritt 2) Beachte Y ist vollständig. Aus dem Satz von Baire folgt daher $\exists n$ mit $V \subset A_n = n \cdot \overline{F(W)}$ für eine offene Kugel $V = K_r(y_0), r > 0$. ObdA ist dann $n = 1$ (ersetze r, y_0 durch $r/n, y_0/n$) und damit

$$K_r(y_0) \subset \overline{F(W)} \ .$$

Schritt 3) Wir hätten jetzt gerne $y_0 = 0$. Für beliebiges $0 \in U$ offen in X wähle dazu $0 \in W \subset X$ offen mit $W - W \subset U$ (Stetigkeit der Differenzabbildung). Dann gilt $0 \in V - V \subset \overline{F(W)} - \overline{F(W)} \subset \overline{F(W-W)} \subset \overline{F(U)}$. Da $V - V$ offen in Y ist, findet man in $V - V$ eine kleine Kugel $K_{r'}(0)$. Notation: Wir ersetzen nun r' durch r, y_0 durch 0 und U durch W und erhalten: Für gegebenes $0 \in W = K_1(0)$ in X gibt es ein $r > 0$ mit (*)

$$\boxed{K_r(0) \subset \overline{F(K_1(0))}} \ .$$

Schritt 4) Wähle reelle Folge $\varepsilon_n > 0$ mit $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n < 1$. Für $y_n \in K_{r\cdot\varepsilon_n}(0)$ gibt es wegen (*)

$$K_{r\cdot\varepsilon_n}(0) \subset \overline{F(K_{\varepsilon_n}(0))}$$

einen approximierenden Vektor $F(x_n)$ mit $x_n \in K_{\varepsilon_n}(0)$ so dass

$$\|y_n - F(x_n)\| < r \cdot \varepsilon_{n+1} \ .$$

[3] also gilt $c_1\|x\|_X \leq \|F(x)\|_Y \leq c_2\|x\|_X$ für gewisse Konstante $c_1, c_2 > 0$.

Startet man mit einem beliebigen $y = y_1$ in $K_{r\cdot\varepsilon_1}(0)$, erhält man durch Iteration eine Folge von Vektoren $x_n \in K_{\varepsilon_n}(0)$ und $y_{n+1} = y - \sum_{i=1}^n F(x_i) \in K_{r\cdot\varepsilon_{n+1}}(0)$ mit

$$\|y - \sum_{i=1}^n F(x_i)\| \; = \|y_{n+1}\| < \; r \cdot \varepsilon_{n+1} \; .$$

Wegen $\|x_n\| < \varepsilon_n$ konvergiert $x := \sum_{n=1}^\infty x_n$ in X, und es gilt $\|x\| \leq \sum \varepsilon_n < 1$ sowie $y = F(x)$. Es folgt

$$K_{r\cdot\varepsilon_1}(0) \subset F(K_1(0)) \; .$$

Da F linear ist, folgt daraus durch Translationen, daß für jeden Punkt $y_0 \in Y$ die Kugel $K_{r\cdot\varepsilon_1}(y_0)$ im Bild von $K_1(x_0)$ liegt, falls $y_0 = F(x_0)$. QED

Satz vom abgeschlossenen Graph. *Sei $F : X \to Y$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zwischen Banachräumen. Dann sind äquivalent*

(1) *F ist stetig.*
(2) *Der Graph $\Gamma_F \subset X \times Y$ ist abgeschlossen.*

Bem. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Produktnorm $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ auf $X \times Y$ gewählt wurde.

Beweis. 1) impliziert 2) aus trivialen Gründen. Zur Umkehrung: Da X und Y vollständig sind, ist $X \times Y$ ebenfalls vollständig! Ist Γ_F abgeschlossen, dann ist Γ_F ein abgeschlossener und damit vollständiger $\mathbb{R}$-linearer Unterraum von $X \times Y$. Die Projektion $pr_X : \Gamma_F \to X$ ist eine stetige bijektive (!) Abbildung zwischen den Banachräumen Γ_F und X. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist daher die lineare Umkehrabbildung $pr_X^{-1} : X \to \Gamma_F$ stetig. Damit ist auch die Zusammensetzung $F = pr_Y \circ pr_X^{-1} : X \to Y$ stetig. QED

Hahn-Banach Theorem

Sei V ein normierter Raum. Für $\ell \in V^*$ mit $\|\ell\| = 1$ und beliebige $x_0, v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\ell(v_2) - \ell(v_1) = \ell(v_2 - v_1) \leq \|v_1 - v_2\| = \|(v_1 + x_0) - (v_2 + x_0)\| \leq \|v_1 + x_0\| + \|v_2 + x_0\|$$

und zeigt $-\ell(v_1) - \|v_1 + x_0\| \;\leq\; -\ell(v_2) + \|v_2 + x_0\|$, sowie dann

$$a := \sup_{v\in V}(-\ell(v) - \|v + x_0\|) \quad \leq \quad b := \inf_{v\in V}(-\ell(v) + \|v + x_0\|) \; .$$

Satz. *Jede stetige Linearform $\ell : V \to \mathbb{R}$, definiert auf einem Teilraum V eines normierten Raumes X, kann zu einer stetigen Linearform f auf ganz X fortgesetzt werden so dass gilt*

$$\boxed{\|f\| = \|\ell\|} \; .$$

Beweis. ObdA $\|\ell\| = 1$. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas reicht es den Fall zu betrachten

$$X = V \oplus \mathbb{R} \cdot x_0 \; .$$

Jede Fortsetzung f von ℓ hat die Form $f(v+\lambda\cdot x_0)=\ell(v)+\lambda\cdot\eta$ für ein geeignetes $\eta\in\mathbb{R}$. f ist stetig auf X mit Norm $\|f\|=1$, falls gilt

$$|\ell(v)+\lambda\cdot\eta|\leq\|v+\lambda\cdot x_0\| \quad , \quad \forall v\in V,\lambda\neq 0\in\mathbb{R} \ .$$

Teilt man durch λ, so ist dies äquivalent zu $-\|v+x_0\|\leq\ell(v)+\eta\leq\|v+x_0\|$ für alle $v\in V$, oder dann äquivalent zu

$$a:=\sup_{v\in V}(-\ell(v)-\|v+x_0\|)\ \leq\ \eta\ \leq\ b:=\inf_{v\in V}(-\ell(v)-\|v+x_0\|) \ .$$

Wie bereits gezeigt wurde, ist das Intervall $[a,b]$ nicht leer; η kann beliebig in $[a,b]$ gewählt werden. QED

Sei X normiert, X^* der Dualraum. Wir benutzen oft die Notation $\langle x^*,x\rangle=x^*(x)$ für $x\in X,x^*\in X^*$. Dann gilt nach Definition

$$\|y\|=sup\{|\langle y,x\rangle|,x\in X,\|x\|=1\} \ ,$$

interessanterweise aber auch

Normlemma. $\boxed{\|x\|=sup\{|\langle y,x\rangle|,y\in X^*,\|y\|=1\}}$.

Beweis. Für $\|y\|=1$ ist offensichtlich $|\langle y,x\rangle|\leq\|y\|\|x\|=\|x\|$. Zu zeigen ist daher nur noch die Existenz eines $y\in X^*$ mit $\|y\|=1$ und der Eigenschaft $|y(x)|=\|x\|$. Ein solches y liefert der Satz von Hahn-Banach durch Fortsetzung der Linearform

$$\ell:\mathbb{R}\cdot x\to\mathbb{R}$$

definiert durch $\ell(x)=\|x\|$ (und $\|\ell\|=1$). QED

Transponierte Abbildung

Seien X,Y normierte Rähme und X^*,Y^* deren Dualräume (stetige Linearformen).

Satz. *Zu einer stetigen $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f:X\to Y$ existiert eine stetige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f^*:Y^*\to X^*$ mit der Eigenschaft*

$$\langle y^*,f(x)\rangle \ = \ \langle f^*(y^*),x\rangle \quad , \quad \forall\ y^*\in Y^*,x\in X \ .$$

Die Abbildung f^* ist dadurch eindeutig bestimmt und es gilt

$$\boxed{\|f^*\| \ = \|f\|} \ .$$

Beweis. Eindeutigkeit. Seien f_1^*,f_2^* zwei solche Abbildungen, so gilt $\langle(f_1^*-f_2^*)(y^*),x\rangle=0$ für alle $y^*\in Y^*$ und alle $x\in X$. D.h. $(f_1^*-f_2^*)(y^*)=0$ für alle $y^*\in Y^*$, oder $f_1^*-f_2^*=0$.

Zur Existenz. Die Zuordnung $x\mapsto\langle y^*,f(x)\rangle$ ist $\mathbb{R}$-linear in der Variable $y^*\in Y^*$, und dies definiert $f^*(y^*)\in X^*$ als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung der Variable $x\in X$. Die so definierte Abbildung $f^*(y^*)$ ist nämlich stetig in x wegen

$$|f^*(y^*)(x)|=|\langle y^*,f(x)\rangle|=|y^*(f(x))|\leq\|y^*\|\cdot\|f(x)\|\leq\|y^*\|\cdot\|f\|\cdot\|x\| \ .$$

In der Tat folgt sogar $\|f^*(y^*)\| \leq \|f\|\|y^*\|$, und daraus wiederum

$$\|f^*\| \ \leq \ \|f\| \ \leq \ \infty \ .$$

Andererseits gilt $|\langle y^*, f(x)\rangle| = |\langle f^*(y^*), x\rangle| \leq \|f^*(y^*)\| \cdot \|x\| \leq \|f^*\| \cdot \|y^*\| \cdot \|x\|$. Aus dem Normlemma folgt dann (Supremum über $\|y^*\| = 1$)

$$\|f(x)\| \leq \|f^*\| \cdot \|x\|$$

und damit $\|f\| \ \leq \ \|f^*\|$ (Supremum über $\|x\| = 1$). Dies ergibt $\|f^*\| = \|f\|$. QED

Homomorphiesatz

Sei B ein normierter Raum und A ein abgeschlossener Unterraum von B. Der Quotient $C = B/A$ wird dann ein normierter Raum durch die **Quotienten-Norm**

$$\boxed{\|b + A\|_C \ = \ \inf_{a\in A} \|b + a\|_B} \ .$$

Beweis der Normeigenschaften: $\|b + A\|_C = 0$ bedeutet $\inf_{a\in A} \|b + a\|_B = 0$. Also $\exists a_n \in A$ mit $b + a_n \to 0$ in B, d.h. die Folge a_n aus A konvergiert gegen $-b$ in B. Da A nach Annahme abgeschlossen in B ist, folgt $-b \in A$. Also $b + A = 0$ in C. Für den Beweis der Dreiecksungleichung benutzt man $\|(b_1 + A) + (b_2 + A)\|_C = \inf_{a\in A} \|b_1 + b_2 + a\|_B \leq \inf_{a_1\in A} \|b_1 + a_1\|_B + \inf_{a_2\in A} \|b_2 + a_2\|_B = \|b_1 + A\|_C + \|b_2 + A\|_C$ indem man $a = a_1 + a_2$ setzt. QED

Offensichtlich ist die Projektion

$$pr : B \twoheadrightarrow C = B/A$$

stetig mit Norm $\|pr\| \leq 1$.

Lemma. *Sei B vollständig, $A \subseteq B$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist auch $C = B/A$ vollständig mit der Quotienten-Norm.*

Beweis. Sei $b_n + A$ eine CF in C. Aus der unteren Dreiecksungleichung folgt

$$\big|\|b_n + A\|_C - \|b_m + A\|_C\big| \leq \|b_n - b_m + A\|_C \leq 2^{-\min(m,n)} \ ,$$

wobei man die zweite Ungleichung oBdA durch Übergang zu einer Teilfolge erhält. Für die Repräsentanten b_n der Nebenklassen $b_n + A$ kann oBdA für alle n angenommen werden (nach Definition der Quotienten-Norm)

$$0 \leq \|b_n\|_B - \|b_n + A\|_C < 2^{-n} \ .$$

Aus der Vierecksungleichung folgt daher leicht (durch einen Limesschluss)

$$\|b_n - b_m\|_B < 2^{-n} + \big|\|b_n + A\|_C - \|b_m + A\|_C\big| + 2^{-m} < 2\cdot 2^{-\min(n,m)} + \|b_n - b_m + A\|_C < 3\cdot 2^{-\min(n,m)} \ .$$

Also ist b_n eine CF in B. Da B vollständig ist, folgt $b_n \to b \in B$. Also $b_n + A \to b + A$ wegen der Stetigkeit der Projektion $B \to C = B/A$. QED

Der Quotient hat folgende universelle Eigenschaft.

Lemma. *Sei $A \subset B$ ein abgeschlossener Unterraum und sei $f : B \to X$ eine stetige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung in einen normierten Raum X mit $f(A) = 0$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\overline{f} : C = B/A \to X$ mit der Eigenschaft $f = \overline{f} \circ pr$. Es gilt $\|\overline{f}\| = \|f\|$.*

Beweis. Offensichtlich ist $\overline{f}(b + A) := f(b)$. Beachte $\|f(b + a)\|_X \leq \|f\| \cdot \|b + a\|_B$ für alle $a \in A$. Es folgt $\|\overline{f}(b+A)\|_X = \|f(b+a)\|_X \leq \|f\| \cdot \inf_{a\in A} \|b+a\|_B = \|f\| \cdot \|b+A\|_C$ und damit $\|\overline{f}\| \leq \|f\|$. Wegen $\|f\| = sup_{b\neq 0}\|f(b)\|/\|b\|$ und $\|f(b)\|/\|b\| \leq \sup_{a\in A} \|f(b+a)\|/\|b+a\| = \|\overline{f}(b + A)\|/\inf_{b\neq a\in A} \|b + a\|$ folgt $\|f\| \leq \|\overline{f}\|$. QED

Kurze exakte Banach-Sequenzen

Eine kurze exakte Banach-Sequenz

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

besteht aus

(1) Banachräumen A, B, C
(2) stetigen $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\psi : A \to B, \varphi : B \to C$ mit
(3) ψ injektiv, φ surjektiv, $Kern(\varphi) = Bild(\psi)$.

Wegen der letzten Eigenschaft ist $U := Bild(\psi) = Kern(\varphi)$ abgeschlossen in B, als Kern der stetigen Abbildung φ. Wir bemerken folgende relevante Eigenschaften:

Fakt 1. Die bijektive Abbildung $\psi : A \to U$ ist ein Homöomorphismus (nach dem Satz von der offenen Abbildung).

Fakt 2. Wegen $\varphi(U) = 0$ gilt $\varphi = \overline{\varphi} \circ pr$ für die Projektion $pr : B \to Q = B/U$. Die natürliche Bijektion $\overline{\varphi} : Q \to C$ ist ein Homöomorphismus (wieder nach dem Satz von der offenen Abbildung).

Proposition. *Für eine kurze exakte Banach-Sequenz ist die durch φ^*, ψ^* definierte adjungierte Sequenz*

$$0 \to C^* \to B^* \to A^* \to 0$$

wieder eine kurze exakte Banach-Sequenz.

Beweis. $\underline{\varphi^* \text{ ist injektiv}}$, denn $\varphi^*(c^*) = c^* \circ \varphi = 0$ bedeutet $c^* : C \to \mathbb{R}$ verschwindet, da φ surjektiv ist.

$\underline{\psi^* \text{ ist surjektiv}}$: Da $\psi : A \to U$ ein Homöomorphismus ist (Fakt 1), ist gibt es für $a \in A^*$ ein $u^* \in U^*$ mit $\psi^*(u^*) = a^*$. Da jede stetige Linearform u^* auf $U = \psi(A)$ sich zu einer stetigen Linearform b^* auf B fortsetzen lässt (Hahn-Banach), folgt $\psi^*(b^*) = a^*$.

<u>$Kern(\psi^*) = Bild(\varphi^*)$</u>: Sei $b^* \in B^*$ mit $\psi^*(b^*) = 0$, d.h. $b^*|_{\psi(A)} \equiv 0$ für $U = \psi(A)$. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "pr"] \arrow[dr, "b^*"] & \\
C & B/U \arrow[l, "\overline{\varphi}"', "\sim"] \arrow[r, "\overline{b}^*"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Nach Fakt 2 ist $\overline{\varphi}$ ein Homöomorphismus, also $b^* = \overline{b}^* \circ (\overline{\varphi})^{-1} \circ \varphi$ und daher $b^* = \varphi^*(c^*) \in Bild(C^*)$ für $c^* = \overline{b}^* \circ (\overline{\varphi})^{-1}$. Somit $Kern(\psi^*) \subseteq Bild(\varphi^*)$. Die Inklusion $Kern(\psi^*) \supseteq Bild(\varphi^*)$ ist trivial wegen $\psi^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \psi)^* = 0$. Letzteres folgt aus $\varphi \circ \psi = 0$. QED

Bidualität

Sei X ein normierter Raum. Die Zuordnung $x \mapsto (y \mapsto \langle y, x\rangle)$ definiert eine kanonische Abbildung

$$i = i_X : X \to (X^*)^* \ .$$

Wegen $|\langle y, x\rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\|$ gilt trivialerweise $\|i_X(x)\| \leq \|x\|$.

Proposition. *Die Abbildung $i_X : X \hookrightarrow (X^*)^*$ ist eine isometrische lineare Inklusion von normierten Räumen, d.h. es gilt*

$$\boxed{\|i_X(x)\| \ = \ \|x\|} \quad , \quad \forall\, x \in X \ .$$

Beweis. OBdA ist für $\|x\| = 1$ zu zeigen $\|i(x)\| = 1$. Es genügt $\|i(x)\| \geq 1$, da die triviale Ungleichung $\|i(x)\| \leq 1$ schon gezeigt wurde. Wähle $y_\ell \in X^*$ mit $y_\ell|_{\mathbb{R}x} = \ell$ und $\|y_\ell\| = \|\ell\| = 1$ als Fortsetzung (Hahn-Banach) von $\ell : \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$, definiert durch $\ell(x) = 1$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "y_\ell"] \arrow[d, dash] & \\
\mathbb{R} \cdot x \arrow[r, "\ell"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Es folgt $\|i(x)\| = sup_{\|y\|=1}|\langle y, x\rangle\| = sup_{\|y\|=1}|y(x)| \geq y_\ell(x) = 1$. QED

Kompatibilität. *Sei $\psi : A \to B$ eine stetige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook, "i_A"] & B \arrow[d, hook, "i_B"] \\
(A^*)^* \arrow[r, "(\psi^*)^*"] & (B^*)^*
\end{tikzcd}$$

Beweis. $\langle i_B(\psi(a)), b^*\rangle = \langle b^*, \psi(a)\rangle = \langle \psi^*(b^*), a\rangle = \langle i_A(a), \psi^*(b^*)\rangle = \langle (\psi^*)^*(i_A(a)), b^*\rangle$ für alle $a \in A, b^* \in B^*$ [benutzt die Def. von i_B, von ψ^*, von i_A und von $(\psi^*)^*$.] Es folgt $(i_B \circ \psi)(a) = ((\psi^*)^* \circ i_A)(a)$ für alle $a \in A$. QED

Reflexivität

Definition. Ein normierter Raum X heisst **reflexiv**, wenn die natürliche Abbildung $i_X : X \hookrightarrow (X^*)^*$ bijektiv ist.

Lemma. *Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Banach-Sequenz, dann ist B reflexiv gdw. A und C beide reflexiv sind.*

Beweis. Für $\Longleftarrow$ benutze das 5-Lemma für das Diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_A"] & B \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_B"] & C \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (A^*)^* \arrow[r] & (B^*)^* \arrow[r] & (C^*)^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Für $\Longrightarrow$ benutzt man eine Variante des 5-Lemmas: Ist i_B ein Isomorphismus, dann zeigt eine Diagramjagd, dass i_A surjektiv ist. Dies benutzt die Injektivität von i_C. Damit sind i_A und i_B bijektiv, also auch i_C nach dem 5-Lemma. QED

Proposition. *Sei X ein Banachraum. Dann ist X reflexiv $\Longleftrightarrow$ X^* reflexiv.*

Beweis. Sei X reflexiv, also $i_X : X \cong (X^*)^*$. Es folgt $(i_X)^* : ((X^*)^*)^* \cong X^*$. Es gilt[4]

$$(i_X)^* \circ i_{X^*} \ = \ id_{X^*} \ ,$$

aber im allgemeinen nicht $i_{X^*} \circ (i_X)^* \ = \ id_{((X^*)^*)^*}$. Im vorliegenden Fall ist dies aber richtig, da $(i_X)^*$ bijektiv ist. Somit ist $i_{X^*} : X^* \to ((X^*)^*)^*$ die Umkehrabbildung der bijektiven (!) Abbildung $(i_X)^*$ und damit ebenfalls bijektiv. Also ist auch X^* reflexiv.

Sei umgekehrt X^* reflexiv. Wegen der schon gezeigten Implikation folgt daraus, dass $(X^*)^*$ ebenfalls reflexiv ist. Da X (vermöge i_X) isometrisch isomorph ist zu einem abgeschlossenen Unterraum von X, ist daher nach dem letzten Lemma auch X reflexiv. QED

Beispiele für reflexive Räume

Für jede reelle Zahl p mit $1 < p < \infty$ existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl q mit $1 < q < \infty$ und der Eigenschaft

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ = \ 1 \ .$$

[4] $\langle i_X^*(i_{X^*}(\beta)), v\rangle = \langle i_X^*(u), v\rangle = \langle u, i_X(v)\rangle = \langle i_{X^*}(\beta), i_X(v)\rangle = \langle i_X(v), \beta\rangle = \langle \beta, v\rangle$ für $u = i_{X^*}(\beta)$ zeigt $i_X^*(i_{X^*}(\beta)) = \beta$ auf Grund von $\langle i_X(\alpha), \beta\rangle = \langle \beta, \alpha\rangle$ und $\langle i_{X^*}(\beta), \gamma\rangle = \langle \gamma, \beta\rangle$ und $\alpha \in X, \beta \in X^*, \gamma \in (X^*)^*$.

Für jedes solche Paar gilt die **Youngsche Ungleichung**

$$cd \ \leq \ \frac{c^p}{p} + \frac{d^q}{q} \quad , \quad \forall\, c, d > 0 \ .$$

[Durch die Substitution $a = c^p, b = d^q$ ist diese äquivalent zu $a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b$ für $t = 1/p$ und $1 - t = 1/q$. Durch Logarithmieren gibt dies die äquivalente Ungleichung $tlog(a) + (1-t)log(b) \leq log\big(ta + (1-t)b\big)$ (Konvexität des Logarithmus !)]

Für reelle Folgen $x = (x_n)$ definiert man $\|x\|_p = (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Die Menge aller Folgen x mit der Eigenschaft $\|x\|_p < \infty$ nennt man ℓ^p.

Höldersche Ungleichung. *Für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^q$ ist das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_n x_n y_n$ absolut konvergent $\sum_n |x_n y_n| \leq (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_n |x_n|^q)^{\frac{1}{q}}$, und damit*

$$\boxed{|\langle x, y\rangle| \ \leq \ \|x\|_p \cdot \|y\|_q} \ .$$

Beweis. Die Youngsche Ungleichung für $c = |x_n|/\|x\|_p$ und $d = |y_n|/\|y\|_q$ liefert die Abschätzung $|x_n y_n|/\|x\|_p\|y\|_q \leq \frac{|x_n|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_n|^q}{q\|y\|_q^q}$. Summation über n zeigt dann die absolute Konvergenz des Skalarproduktes und

$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|_p\|y\|_q} \ \leq \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ = \ 1 \ .$$

Minkowski Lemma. *ℓ^p ist ein reeller Vektorraum und $\|x\|_p$ definiert eine Norm auf ℓ^p.*

Beweis. Eigentlich zu zeigen ist nur die $\|.\|_p$-Dreiecksungleichung. Wegen $\frac{p}{q} = p - 1$ und $(p-1)q = p$ zeigt die Höldersche Ungleichung

$$\|x+y\|_p^p = \sum_n |x_n+y_n|^p = \sum_n |x_n+y_n||x_n+y_n|^{p-1} \leq \sum_n |x_n||x_n+y_n|^{p-1} + \sum_n |y_n||x_n+y_n|^{p-1}$$

$$\leq \|x\|_p (\sum_n |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p (\sum_n |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{q}} = (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x + y\|_p^{p-1}$$

und dies impliziert $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. QED

Dualräume. Offensichtlich definiert $\ell^q \ni y \mapsto \big(x \mapsto \langle y, x\rangle = \sum_n y_n \cdot x_n\big)$ für $x \in \ell^p$ eine stetige Abbildung

$$\boxed{\lambda : \ell^q \to (\ell^p)^*}$$

mit Operatornorm $\|\lambda(y)\| \leq \|y\|_q$ (Höldersche Ungleichung). Es gilt sogar

Proposition. *Für $1 < p < \infty$ definiert die Abbildung $\lambda : \ell^q \to (\ell^p)^*$ einen isometrischen Isomorphismus von Banachräumen*

$$\boxed{\|\lambda(y)\| \ = \ sup_{\xi \neq 0} \frac{|\langle y, \xi\rangle|}{\|\xi\|_p} \ = \ \|y\|_q} \ .$$

Beweis. Isometrie. Zu $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachte $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := sign(y_n)|y_n|^{q-1}$.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longleftrightarrow q + p = qp \Longleftrightarrow q = (q-1)p \Longleftrightarrow p = q(p-1)$$

zeigt $|y_n|^q = |x_n|^{\frac{q}{q-1}} = |x_n|^p$, also $\|y\|_q^q = \|x\|_p^p$ oder $\|x\|_p = \|y\|_q^{\frac{q}{p}}$. Aus $\frac{|\langle y,\xi\rangle|}{\|\xi\|_p} = \frac{\|y\|_q^q}{\|x\|_p} = \|y\|_q$ für $\xi = x$ folgt damit $\|\lambda(y)\| = \|y\|_q$.

Surjektivität von λ. Betrachte die Folge $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ mit der 1 an der n-ten Stelle. Für $F \in (\ell^p)^*$ sei $y_n := F(e_n) \in \mathbb{R}$. Definiere

$$w_N = \sum_{n=1}^{N} y_n \cdot e_n$$

in l^q. Wir definieren dazu einen *assozierten* Vektor

$$v_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot e_n \quad , \quad x_n := sign(y_n)|y_n|^{q-1}$$

in l^p. Nach Definition gilt einerseits $\|w_N\|_q^q = \sum_{n=1}^N x_n y_n = \langle w_N, v_N\rangle = F(v_N)$ und andererseits $\|v_N\|_p^p = \|w_N\|_q^q$ wegen $|x_n|^p = |y_n|^q$. Es folgt (*)

$$\|w_N\|_q^q = |\langle w_N, v_N\rangle| \le |F(v_N)| \le \|F\| \cdot \|v_N\|_p = \|F\| \cdot \|w_N\|_q^{\frac{q}{p}} \ , \quad \text{also } \|w_N\|_q^{q-\frac{q}{p}} \le \|F\| \ .$$

Es gilt $q - \frac{q}{p} = 1$ wegen $q \neq \infty$. Also $\|w_N\|_q \le \|F\|$, und die w_N konvergieren in ℓ^q im Limes $N \to \infty$ gegen den Folgenvektor $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in ℓ^q mit $\|y\|_q \le \|F\|$. Auf den Vektoren $e_n \in \ell^p$ stimmen die stetigen Linearformen $\lambda(y)$ und F überein. Da die e_n einen dichten (!) Untervektorraum von ℓ^p aufspannen, folgt $F = \lambda(y)$. QED

Aus der letzten Proposition folgt die Reflexivität und damit auch die Vollständigkeit der Räume ℓ^p für $1 < p < \infty$.

Separabilität

Ein normierter Raum X heisst **separabel**, falls eine abzählbare Teilmenge M von Vektoren in X existiert, welche einen dichten $\mathbb{R}$-Unterraum V in X aufspannt.

Beispiel. Für $p \in (1, \infty)$ ist ℓ^p separabel, denn die Vektoren $e_n \in \ell^p$, definiert durch $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ mit der 1 an der n-ten Stelle, spannen einen dichten Teilraum auf.

Bem. Wählt man eine maximale Teilmenge $\mathbb{R}$-linear unabhängiger Vektoren in M, dann definiert diese eine abzählbare Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums V (Lemma von Zorn). Man kann also oBdA annehmen M selbst sei eine abzählbare Teilmenge linear unabhängiger Vektoren.

Bem. Sei $M = \{e_1, e_2, ...\}$ eine abzählbare Basis von V. Dann liegt der von M erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum

$$V_{\mathbb{Q}} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{|I|=n} \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q} \cdot e_i$$

dicht in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V, und damit auch dicht in X. Da abzählbare Vereinigungen von abzählbaren Mengen wieder abzählbar sind, ist $V_{\mathbb{Q}}$ abzählbar und dicht in X. Die abzählbar vielen auf Länge 1 normierten Vektoren $v/\|v\|$ für $0 \neq v \in V_{\mathbb{Q}}$ liegen dann dicht in der Einheitssphäre S von X. Es folgt

Lemma. *X ist separabel genau dann, wenn eine abzählbare Menge von Vektoren dicht in X liegt, oder dicht in der Einheitssphäre S von X.*

Beispiel. Der Folgenraum l^∞ der beschränkten Folgen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ ist nicht separabel. [Für eine abzählbare dichte Menge M von Vektoren $v^{(n)}, n \in \mathbb{N}$ in der Sphäre $S \subset l^\infty$ läge die Folge $x = (x_n)$ mit $x_n := -sign(v_n^{(n)})$ in S mit $\|x - v^{(n)}\|_\infty \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch!].

Fakt 1. Ist X separabel und $f : X \to Y$ stetig und surjektiv, dann ist auch Y separabel.

Fakt 2. Ist X^* separabel, dann ist auch X separabel.

Beweis. Wähle Folge f_i von Vektoren, welche in der Einheitskugel von X^* dicht liegen (siehe obiges Lemma). Wegen $\|f_n\| = 1$ und

$$\|f_n\| = sup_{\|x\|=1} |\langle f_n, x\rangle|$$

existieren $x_n \in X$ mit $\|x_n\| = 1$ und

$$1/2 \leq |\langle f_n, x_n\rangle| \ .$$

Behauptung: Die x_n spannen einen dichten Teilraum von X auf! Wäre dies nicht der Fall, dann gäbe es eine stetige Linearform $f \in X^*$ mit $f(x_1) = f(x_2) = ... = 0$ mit $\|f\| = 1$ (nach Hahn-Banach). Anderseits liegen die f_n dicht in der Einheitskugel, d.h. eine Teilfolge der f_n konvergiert gegen f. Ein Widerspruch wegen

$$1/2 \leq |\langle f_n, x_n\rangle| = |\langle f - f_n, x_n\rangle| \leq \|f - f_n\| \cdot \|x_n\| = \|f - f_n\| < \varepsilon$$

für $n \to \infty$. QED

Aus den letzten beiden Fakten 1 und 2 folgt unmittelbar

Proposition. *Sei X reflexiv. Dann ist X separabel gdw. X^* separabel ist. In diesem Fall ist auch jeder abgeschlossene Unterraum A von X sowie sein Quotient X/A separabel.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Fakt 2 und $X \cong X^{**}$. Der Quotient X/A is separabel nach Fakt 1. Wegen $X^* \twoheadrightarrow A^*$ ist A^* separabel (Fakt 1) und damit auch A (Fakt 2). QED

Beispiel. Man kann zeigen $\ell^\infty \cong (\ell^1)^*$ für den Folgenraum ℓ^∞ (siehe obiges Beispiel) und ℓ^1 definiert analog zu ℓ^p für $1 < p < \infty$. Der Raum ℓ^1 ist separabel, denn die Standardvektoren $e_1, e_2, ..$ liegen dicht in ℓ^1. Der Raum $\ell^\infty = (\ell^1)^*$ ist aber nicht separabel. Insbesondere sind daher ℓ^1 und ℓ^∞ nicht reflexiv.

Einheitskugeln

Lemma. *Sei S die Einheitssphäre eines normierten Raumes X. Gibt es für eine fixierte reelle Zahl $r < 1$ Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$ in X mit*

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_r(v_i) \ ,$$

dann ist X der von den $v_1, ..., v_n$ aufgespannte (abgeschlossene) Unterraum V.

Beweis. Angenommen es gäbe $x \in X$ mit $d = \|x\|_{X/V} > 0$. Zerlege $x = x' + v$ mit $\|x'\| < d + \varepsilon$ und $v \in V$. Dann ist $x' \neq 0$, also $x' = \|x'\| \cdot (x'' + v_i)$ mit $\|x''\| < r$ für ein $i \in \{1, .., n\}$. Es folgt $x = \|x'\| \cdot x'' + (v + \|x'\| \cdot v_i)$ sowie $\|x\|_{X/V} \leq \|x'\| \cdot \|x''\| < (d+\varepsilon) \cdot r$. Wählt man $\varepsilon < d(1-r)/r$ klein genug, ist $(d+\varepsilon) \cdot r < d$. Ein Widerspruch! Also $X = V$.

Bem. Die Annahme $r < 1$ ist wesentlich, denn $S \subset K_r(0)$ gilt immer für $r \geq 1$.

Proposition. *Die Einheitssphäre S resp. abgeschlossene Einheitskugel E eines normierten Raumes X ist genau dann kompakt, wenn X endlich dimensional als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.*

Beweis. Eine Richtung folgt aus dem letzten Lemma. Sei umgekehrt $\dim(X) = n < \infty$ und $e_1, ..., e_n$ eine Basis von X. Für $M := \max(\|e_i\|_X)$ gilt $\|\sum_i x_i \cdot e_i\|_X \leq M \cdot \sum_{i=1} |x_i|$ (Dreiecksungleichung). Wegen $\dim(X^*) \leq \dim Hom_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{R}) = \dim(X)$, und analog dann $\dim((X^*)^*) \leq \dim(X^*) \leq \dim(X)$, ist $i_X : X \to (X^*)^*$ aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Aus den Ungleichungen folgt daher $\dim(X) = \dim(X^*)$, d.h. jede Linearform auf X ist automatisch stetig. Somit ist $m := \max_{i=1}^n(\|e_i^*\|_{X^*})$ wohldefiniert für die Dualbasis e_i^*. Für $x = \sum_i x_i \cdot e_i$ gilt $\max_i(|x_i|) \leq m \cdot \|x\|_X$ wegen $|x_i| = |e_i^*(x)| \leq \|e_i^*\|_{X^*} \cdot \|x\|_X$. Beide Abschätzungen zusammen ergeben $\frac{1}{m\sqrt{n}} \cdot r \leq \|x\|_X \leq nM \cdot r$ für $r^2 = \sum_i x_i^2$. Also definiert $\|.\|_X$ dieselbe Topologie wie die Euklidsche Norm. Insbesondere ist $\|.\|_X$ stetig in der normalen Topologie. Also ist E abgeschlossen und ist wegen den obigen Ungleichungen Euklidisch beschränkt, und damit kompakt nach Heine-Borel. QED

Bemerkung. Die im Beweis auftretenden Normen $\sum_{i=1} |x_i|$ resp. r resp. $\max_i(|x_i|)$ sind die später definierten L^p-Normen für $p = 1, 2, \infty$ einer endlichen Menge der Kardinalität n mit dem Zählmass I.

Korollar. *Endlich dimensionale normierte Räume X sind reflexiv und vollständig. Für die Einheitsvollkugeln $E \subset X$ resp. $E^* \subset X^*$ gilt $E = \{x \in X \mid |\langle E^*, x\rangle| \leq 1\}$ resp. $E^* = \{x^* \in X^* \mid |\langle x^*, E\rangle| \leq 1\}$.*

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften ergaben sich beim Beweis der letzten Proposition. Da E kompakt ist, folgt $\|x^*\| = \max_{\|x\|=1} |\langle x^*, x\rangle|$, also $x^* \in E^* \iff |\langle x^*, E\rangle| \leq 1$. Ditto für E^*. QED

Zur Erinnerung, für S resp. E als metrischem Raum sind folgende Begriffe äquivalent:

(1) kompakt (d.h. überdeckungskompakt)
(2) folgenkompakt
(3) präkompakt und vollständig

Beispiel. Die Einheitsvektoren e_n definieren eine Folge in der Einheitssphäre S von ℓ^p ($p \neq \infty$). Wir behaupten, diese besitzt keine normkonvergente Teilfolge. [Durch Übergang zu einem zu ℓ^p isomorphen Teilraum können wir annehmen, die konvergente Folge sei die Folge der e_n für $n = 1, 2, ...$ selbst mit Limes $e = \lim_n e_n$. Für jedes $f \in \ell^q = (\ell^p)^*$ gilt dann $\lim_n \langle f, e_n\rangle = \langle f, e\rangle$. Für $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in l^q gilt aber

$$f_n := \langle f, e_n\rangle \to 0 \quad , \quad \text{für } q \neq \infty \ ,$$

da die Glieder der konvergenten Reihe $\sum_n |f_n|^q < \infty$ eine Nullfolge f_n definieren. Somit folgt für $p \neq 1, \infty$

$$\lim_n \langle f, e_n\rangle = 0 \quad , \quad \forall\ f \in (\ell^p)^*$$

und $\langle f, e\rangle = 0$ für alle $f \in (\ell^p)^*$. Also $e = 0$ (Hahn-Banach) im Widerspruch zu $\|e\| = 1$].

Aber: Die beschränkte Folge der $e_n \in \ell^p$ konvergiert für $p \neq 1, \infty$ schwach gegen 0 im Sinne des nächsten Abschnitts. Beachte, die Einheitssphäre S ist also nicht abgeschlossen in der schwachen Topologie[, und die Normabbildung $\|.\|_p : \ell^p \to \mathbb{R}$ ist also nicht stetig in der schwachen Topologie auf ℓ^p. Wäre sie es, würde aus schwacher Konvergenz die Normkonvergenz folgen.] Wir bemerken, dass wegen des Normlemmas die **abgeschlossene Einheitskugel** $E = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ in der schwachen Topologie abgeschlossen ist. Dies benutzt

$$E \ = \bigcap_{\|f\|=1} \{x \in X \mid \langle f, x\rangle \in [-1, 1]\} \ .$$

Schwache Konvergenz und schwache Operatorkonvergenz

Wir beginnen mit dem Begriff der **schwachen Operatorkonvergenz**. Sind X und Y normiert, dann trägt $L(X, Y)$ einerseits die **Normtopologie** definiert durch die Operatornorm. Ist $f_n \in L(X, Y)$ eine Folge, dann sagen wir f_n ist **schwach (operator)konvergent** gegen eine (dann automatisch) lineare Abbildung $f \in Hom_{\mathbb{R}}(X, Y)$, wenn punktweise Konvergenz vorliegt, d.h. im Sinne der Normkonvergenz in Y gilt

$$f(x) \ = \ \lim_n \ f_n(x) \quad , \quad \forall\ x \in X \ .$$

Konvergenz in der Norm-Topologie impliziert schwache Operatorkonvergenz.

Lemma. *Ist X vollständig und konvergiert $f_n \to f$ (schwache Operatorkonvergenz), dann gilt $f \in L(X,Y)$ sowie*

$$\boxed{\|f\| \ \leq \ \liminf_n \|f_n\| < \infty} \ .$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Banach-Steinhaus: Die Konvergenz von $f_n(x)$ für festes $x \in X$ impliziert punktweise Beschränkheit von $\mathbf{F} = \{f_n\}$, also $\exists C$ mit $\|f_n\| \leq C$ für alle n. Man kann obdA übergehen zu einer Teilfolge der f_n, welche gegen $\liminf_n \|f_n\| < \infty$ konvergiert. Aus $\|f_n(x)\|_Y \leq \|f_n\| \cdot \|x\|$ folgt daher $\lim_n \|f_n(x)\|_Y \leq \liminf_n \|f_n\| \cdot \|x\|$. Wegen $\lim_n f_n(x) = f(x)$ in $(Y, \|.\|_Y)$ und da $\|.\|_Y$ stetig in der Normtopologie ist, gilt $\lim_n \|f_n(x)\|_Y = \|\lim_n f_n(x)\|_Y = \|f(x)\|_Y$. Also $\|f(x)\| \leq \liminf_n \|f_n\| \cdot \|x\|$. QED

Wir fahren fort mit dem Begriff der **schwachen Konvergenz** auf normierten Räumen X: Eine Folge von Vektoren $x_n \in X$ heisst **schwach konvergent** gegen $x \in X$, wenn für alle $f \in X^*$ gilt[5]

$$\langle f, x_n \rangle \ \to \ \langle f, x \rangle \ .$$

Man nennt dann x den **schwachen Limes**. Dieser ist eindeutig bestimmt, wenn er existiert (Hahn-Banach). Konvergiert eine Folge $x_n \to x$ in der Normtopologie, dann natürlich auch in der schwachen Topologie, da alle $f \in X^*$ stetig in der Normtopologie sind.

Caveat. Auf dem Dualraum X^* hat man drei natürliche Topologien: Die Normtopologie, die schwache Topologie und die schwache Operatortopologie auf $X^* = L(X, \mathbb{R})$. Letztere nennt man auch die schwach-$*$-Topologie auf X^*, und diese ist schwächer als die schwache Topologie auf X^*. Normkonvergenz impliziert schwache Konvergenz und diese die schwache Operatorkonvergenz. Alle drei Topologien auf X^* sind im allgemeinen verschieden.

Schwache Topologie auf reflexiven Räumen

Auf reflexiven normierten Räumen hat die schwache Topologie Eigenschaften, wie wir sie von endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen kennen. Wir formulieren diese in den nächsten Lemmata A,B und C.

Lemma A. *Ist X reflexiv, so ist jede schwache CF in X schwach konvergent in X und der Grenzwert ist eindeutig.*

Beweis. Für $x_n \in X$ sei $\langle f, x_n \rangle$ eine reelle CF für alle $f \in X^*$. Betrachte anstelle der $x_n \in X$ die Bilder $i_X(x_n)$ in $(X^*)^* = L(X^*, \mathbb{R})$. Dann konvergiert nach Annahme die Bildfolge in $L(X^*, \mathbb{R})$ bezüglich der schwachen Operatortopologie gegen einen Grenzwert $\tilde{x} \in Hom_{\mathbb{R}}(X^*, \mathbb{R})$ (um diesen zu definieren benutze die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$). Aus dem letzten Lemma folgt $\tilde{x} \in L(X^*, \mathbb{R}) = (X^*)^*$ und für alle $f \in X^*$ gilt

$$\langle \tilde{x}, f \rangle = \lim_n \langle i_X(x_n), f \rangle \ .$$

[5] Die zugehörige Topologie auf X ist erzeugt von der Basis der Mengen $f^{-1}(U)$ für $f \in X^*, U$ offen in $\mathbb{R}$.

Wegen der Reflexivität ist $\tilde{x} \in (X^*)^*$ von der Gestalt $\tilde{x} = i_X(x)$ für ein $x \in X$. Aus der letzten Gleichung und $\langle f, x\rangle = \langle i_X(x), f\rangle$ folgt für alle $f \in X^*$

$$\langle f, x\rangle = \lim_n \langle f, x_n\rangle \ ,$$

also die schwache Konvergenz von x_n gegen x. QED

Lemma B. *Ist X normiert und x_n schwach konvergent gegen $x \in X$. Dann ist x_n eine normbeschränkte Folge in X mit*

$$\boxed{\|x\| \ \leq \ \liminf \|x_n\|} \ .$$

Beweis. Wieder fassen wir x_n als Folge in $(X^*)^* = L(X^*, \mathbb{R})$ auf. Beachte X^* ist vollständig. Also ist das Lemma über die schwache Operatorkonvergenz (Banach-Steinhaus) anwendbar. Es folgt $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$. QED

Lemma C. *Ist X reflexiv, besitzt jede in X normbeschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge (also ist die abgeschlossene Einheitsvollkugel E schwach folgenkompakt).*

Beweis. Schritt 1) Ersetze X durch den Abschluss Y vom Aufspann der Folgenglieder x_n. Dieser abgeschlossene Teilraum Y ist wieder reflexiv und per Definition separabel. Es genügt die Aussage für Y anstelle von X zu zeigen. Also ist X oBdA reflexiv und separabel.

Schritt 2) Ist X reflexiv und separabel, dann ist das Dual X^* separabel. Sei daher $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Menge von (norm)-dichten Vektoren in X^*. Aus der Annahme der Normbeschränktheit $\|x_n\| \leq C$ einer Folge x_n in X folgt für festes f_k die Beschränktheit der reellen Folge $\langle f_k, x_n\rangle$ für laufendes n. Es gibt also eine Teilfolge

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, ... \quad , \qquad \text{konvergent auf } \ f_1$$

eine Teilfolge der Folge $x_n^{(1)}$

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, ... \quad , \qquad \text{konvergent auf } \ f_2$$

eine Teilfolge der Folge $x_n^{(2)}$

$$x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, ... \quad , \qquad \text{konvergent auf } \ f_3$$

und so weiter. Die Diagonalfolge $\tilde{x}_n = x_n^{(n)}$ ist eine Teilfolge der Folge x_n, für welche jetzt der Limes $\lim_n \langle f_k, \tilde{x}_n\rangle$ für alle k existiert.

Schritt 3) Für beliebiges $f \in X^*$ existiert nach Wahl der Folge f_k eine Teilfolge, welche gegen f in der Normtopologie konvergiert. Zur Vereinfachung der Notation nennen wir diese Teilfolge wieder f_k, wollen also annehmen $f = \lim_k f_k$. Aus Schritt 2) folgt dann

$$\begin{aligned} |\langle f, \tilde{x}_n - \tilde{x}_m\rangle| &\leq |\langle f - f_k, \tilde{x}_n - \tilde{x}_m\rangle| + |\langle f_k, \tilde{x}_n - \tilde{x}_m\rangle| \leq 2C \cdot \|f - f_k\| + |\langle f_k, \tilde{x}_n - \tilde{x}_m\rangle| \\ &< \varepsilon + |\langle f_k, \tilde{x}_n - \tilde{x}_m\rangle| \end{aligned}$$

für alle $k \geq k(\varepsilon)$. Dieses lässt sich wegen Schritt 2) weiter abschätzen durch

$$\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

für alle $k \geq k(\varepsilon)$ und alle $n, m \geq N(k, \varepsilon)$. Setzt man $N_f(\varepsilon) = N(k(\varepsilon), \varepsilon)$ folgt, dass die Folge $\tilde{x}_n$ eine schwache CF in X ist: Das heisst, es gilt

$$|\langle f, \tilde{x}_n - \tilde{x}_m \rangle| < 2\varepsilon$$

für alle $n, m \geq N_f(\varepsilon)$.

Schritt 4) Aus Lemma A (Reflexivität von X) und dem letzten Schritt folgt jetzt die schwache Konvergenz der Teilfolge $\tilde{x}_n$. QED

Bem a). Lemma C überträgt sich für die schwach-*-Topologie auf Dualräumen X^* beliebiger normierter Räume in der Form: $E \subset X^*$ in der schwach-*-Topologie (auf dem Dualraum X^* eines normierten Raumes X) ist überdeckungskompakt[6]. Die schwach-*-Topologie auf E ist nämlich induziert von der Produkttopologie auf $\prod_{x \in X}[-\|x\|, \|x\|]$ unter der natürlichen Einbettung $\iota : X^* \hookrightarrow \prod_{x \in X} \mathbb{R}$. Beachte $\iota^{-1}(\prod_{x \in X}[-\|x\|, \|x\|]) = E$, und damit ist E schwach-*-abgeschlossen, also überdeckungskompakt nach dem Satz von Tychonoff. In der schwachen Operatortopologie ist jede schwache CF schwach konvergent aus trivialen Gründen. Das Analogon von Lemma A gilt daher für die schwach-*-Topologie auf X^* für beliebige normierte Räume X.

Sei $E \subset X^*$ die Einheitskugel versehen mit der schwach-*-Topologie. Man erhält eine kanonische lineare injektive Abbildung $X \hookrightarrow C(E)$, welche $x \in X$ abbildet auf die Funktion $f_x(e) := \langle e, x \rangle$. Die Abbildung ist isometrisch wegen $\|x\|_X = sup_{e \in E}|f_x|$. Da X vollständig ist, ist das Bild ein abgeschlossener Unterraum.

Proposition. *Jeder Banachraum ist isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum eines Raumes $C(E)$ von stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum E.*

Ist X reflexiv, ist die schwach-*-Topologie auf $(X^*)^*$ dasselbe wie die schwache Topologie auf X unter der Isometrie $i_X : X \cong (X^*)^*$. Da $E \subset (X^*)^*$ schwach-*überdeckungskompakt ist, ist damit im reflexiven Fall $E \subset X$ auch schwach überdeckungskompakt. Die Umkehrung gilt auch:

Proposition. *Ist die Einheitskugel $E = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ eines Banachraumes X schwach <u>überdeckungskompakt</u>, dann ist X reflexiv.*

Beweis. Für $\varkappa \in (X^*)^*$ mit $\|\varkappa\| = 1$ suchen wir $x \in X$ mit $f(x) = \langle i_X(x), f \rangle = \langle \varkappa, f \rangle$ für alle $f \in X^*$. Nach Cantors Durchschnittssatz für einen überdeckungskompakten Raum

[6] aber vielleicht nicht folgenkompakt! Für die schwache Topologie gibt es das bemerkenswerte Resultat von Eberlein und Smulian, dass eine schwach abgeschlossene Menge genau dann überdeckungskompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist.

E (siehe [HS], Seite 167) gilt: Ist jeder endliche, für beliebige $f_1, .., f_n \in X^*$ gebildete Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen $\{ \ x \in E \mid \langle i_X(x), f_i \rangle = \langle \varkappa, f_i \rangle \ \}$

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ \{ \ x \in E \mid \langle i_X(x), f_i \rangle = \langle \varkappa, f_i \rangle \ \}$$

nicht leer, dann ist auch der analoge Durchschnitt über alle $f \in X^*$ nicht leer. Es genügt daher alternativ ein $x \in E$ zu finden mit

$$f_i(x) = \langle \varkappa, f_i \rangle \quad , \quad i = 1, ..., n \ .$$

Der Unterraum $A = \bigcap_{i=1}^{n} Kern(f_i)$ ist abgeschlossen in X. Betrachte den Quotient

$$pr : X \twoheadrightarrow \overline{X} = X/A \ .$$

Nach Definition der Quotientennorm gilt $pr(E) \subseteq \overline{E}$, und $pr(E)$ liegt dicht in der Einheitskugel $\overline{E}$ von $\overline{X}$. E ist kompakt in der schwachen Topologie, also auch das stetige Bild $pr(E)$. Auf $\overline{X}$ ist die schwache Topologie die Normtopologie wegen $\dim(\overline{X}) \leq n$ und $pr(E)$ ist abgeschlossen in $\overline{E}$. Es folgt

$$\overline{E} \ = \ pr(E) \quad , \qquad \text{(wegen der Abgeschlossenheit von } pr(E)).$$

Einschränken von $\varkappa$ induziert eine Linearform $\overline{\varkappa}$ auf $\overline{X}^* \hookrightarrow X^*$, d.h. $\overline{\varkappa} \in (\overline{X}^*)^*$. Es folgt

$$i_{\overline{X}}(\overline{x}) = \overline{\varkappa}$$

für ein $\overline{x} \in \overline{X}$ (Bidualität endlich dimensionaler Räume). Der Raum $\overline{X}^*$ wird von $f_1, .., f_n$ aufgespannt und die natürliche Operatornorm auf $\overline{X}^*$ ist (!) die Einschränkung der Norm von X^*.

$$\begin{tikzcd}
X^* \times X \arrow[rr] \arrow[d, shift left=8, ->>] & & \mathbb{R} \arrow[d, equal] \\
\overline{X}^* \times \overline{X} \arrow[rr] \arrow[u, hook, shift left=-8] & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Aus $\|\varkappa\| = 1$ folgt daher $|\langle \overline{\varkappa}, \overline{E}^* \rangle| \leq 1$ für die Einheitskugel $\overline{E}^*$ von $\overline{X}^*$. Für endlich dimensionale Räume gilt $\overline{E} = \{\overline{x} \in \overline{X} \mid \langle \overline{x}, \overline{E}^* \rangle \leq 1\}$ (Kompaktheit der Einheitskugel für endlich dimensionale Räume). Es folgt $\overline{x} \in \overline{E}$. Wegen $\overline{E} = pr(E)$ folgt $\overline{x} = pr(x)$ für ein $x \in E$, und nach Konstruktion dann $f_i(x) = \langle \varkappa, f_i \rangle$ für alle $i = 1, .., n$. QED

Bem b). Stimmen für einen normierten Raum die schwache und die schwach-*-Topologie auf X^* überein, dann ist die Einheitskugel E von X^* schwach überdeckungskompakt nach Bemerkung a). Die letzte Proposition zeigt dann, dass X^* (und damit auch X) reflexiv ist. Umgekehrt stimmen für einen reflexiven Raum aus trivialen Gründen auf X^* die schwache und die schwach-*-Topologie überein.

Bem c). Für einen reflexiven Raum X stimmen die Normtopologie und die schwache Topologie dann und nur dann überein, wenn X endlich dimensional ist. Die nichttriviale Richtung benutzt, dass nach Bemerkung a) dann E und damit S durch endlich viele Kugeln vom Radius $r < 1$ überdeckt werden kann.

Hilberträume

Definition. Ein **Prä-Hilbertraum** ist ein reeller Vektorraum V mit einem positiv definiten $\mathbb{R}$-bilinearen symmetrischen Skalarprodukt

$$\langle .,. \rangle : \ V \times V \to \mathbb{R} \ ,$$

d.h. es gilt $\langle v,v\rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ mit Gleichheit $\langle v,v\rangle = 0$ nur für $v = 0$.

Bem. Jeder reelle Unterraum eines Prä-Hilbertraumes ist wieder ein Prä-Hilbertraum.

Ein Prä-Hilbertraum wird durch die assoziierte Norm

$$\|v\|^2 := \langle v,v\rangle$$

zu einem **normierten** Raum. Beachte, die Dreiecksungleichung $\|v+w\|^2 \leq (\|v\|+\|w\|)^2$, oder $\|v\|^2+2\langle v,w\rangle+\|w\|^2 \leq \|v\|^2+2\|v\|\cdot\|w\|+\|w\|^2$, folgt nämlich aus der **Schwarzschen Ungleichung**: Für $v,w \in V$ gilt[7]

$$\boxed{|\langle v,w\rangle| \ \leq \ \|v\|\cdot\|w\|} \ .$$

Unmittelbar klar ist die **Parallelogramm Identität** (benutze binomische Formel)

$$\boxed{\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2} \ .$$

Lemma. *Ein Prä-Hilbertraum ist ein normierter Raum mit Parallelogramm Identität.*

Beweis. Die Kubusformel[8] $q(u+v+w)-q(u+v)-q(u+w)-q(v+w)+q(u)+q(v)+q(w) = 0$ für $q(v) = \|v\|^2$, welche äquivalent zur Biadditivität von $\langle v,w\rangle := \frac{1}{2}(q(v+w)-q(v)-q(w))$ ist, folgt aus der Parallelogramm Identität und $q(v) = q(-v)$. Man zeigt damit dann die $\mathbb{Q}$-Bilinearität und wegen Stetigkeit die $\mathbb{R}$-Bilinearität von $\langle v,w\rangle$. Aus $\langle v,v\rangle = \|v\|^2$ folgt die Definitheit. QED

Definition. *Ein* **Hilbertraum** *ist ein Prä-Hilbertraum, welcher bezüglich der assoziierten Norm $\|.\|$ vollständig ist.*

Beispiel. Der Raum ℓ^2 ist ein Hilbertraum mit dem Standardskalarprodukt $\ell^p \times \ell^q \to \mathbb{R}$ wegen $\ell^p = \ell^q$ für $p = q = 2$.

Lemma. *Die Vervollständigung eines Prä-Hilbertraumes ist ein Hilbertraum.*

Beweis. Die Parallelogramm Identität überträgt sich durch einen Limesschluß auf die Komplettierung von V. Damit ist die Komplettierung ein Hilbertraum. QED

---

[7] $\|v\|^2t^2 + 2\langle v,w\rangle t + \|w\|^2 = \|v+tw\|^2 \geq 0 \ \forall t$ impliziert $4\cdot\|v\|^2\|w\|^2 - (2\langle v,w\rangle)^2 \geq 0$.

[8] Wende dazu an $-q(u+v+w)+2q(u+v)+2q(w) = q(u+v-w) = -q(u-v-w)+2q(u-w)+2q(v) = (q(-u-v-w)-2q(u)-2q(-v-w))+2(-q(u+w)+2q(u)+2q(w))+2q(v)$ und benutze $q(v+w) = q(-v-w)$ sowie $q(u+v+w) = q(-u-v-w)$.

Orthoprojektion

Sei V ein Hilbertraum. Für einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum A ist das **Orthokomplement**

$$\boxed{A^\perp = \{w \in V \mid \langle w, a\rangle = 0 \ \forall\ a \in A\}}$$

ein abgeschlossener $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V, und aus der Definitheit von $\langle ., .\rangle$ folgt

$$\boxed{A \cap A^\perp = 0}\ .$$

Abgeschlossene konvexe Mengen. Sei A nun allgemeiner eine beliebige abgeschlossene konvexe Teilmenge von V. Dann ist für $v \in V$ der Abstand $d(v, A)$ erklärt

$$d = d(v, A) := \inf_{a\in A} \|v - a\| \ .$$

Für jede Folge $v_n = v - a_n$ mit $\|v_n\| \to d$, $a_n \in A$ gilt im Limes $n, m \to \infty$

$$\|v_n + v_m\| \leq \|v_n\| + \|v_m\| \to d + d = 2d \ .$$

Wegen $\frac{a_n+a_m}{2} \in A$ gilt $d \leq \|v - \frac{a_n+a_m}{2}\|$, also $2d \leq \|v_n + v_m\|$ und damit $\|v_n + v_m\| \to 2d$. Die Parallelogramm Identität

$$\boxed{\|v_n - v_m\|^2 = 2\|v_n\|^2 + 2\|v_m\|^2 - \|v_n + v_m\|^2}$$

zeigt daher $\|v_n - v_m\|^2 \to 2d^2 + 2d^2 - (2d)^2 = 0$ für $n, m \to \infty$. Also ist v_n eine CF und somit konvergent in V. Für $w = \lim_n v_n$ gilt $\|w\| = \lim_n \|v_n\| = d$. Der Grenzwert w ist *eindeutig* und hängt nicht von der Wahl der Folge $v_n = v - a_n$ ab, wie man durch Mischen solcher Folgen a_n sieht. Aus der Konvergenz von v_n folgt die Konvergenz von a_n. Beachte $a = \lim_n a_n \in A$. Dies zeigt im Falle einer linearen Teilraumes A

Satz. *Für abgeschlossene $\mathbb{R}$-Unterräume A eines Hilbertraumes V gilt*

$$\boxed{V \ = \ A \ \oplus \ A^\perp}\ .$$

Insbesondere ist $A = V$ äquivalent zu $A^\perp = 0$.

Beweis. Wegen obiger Zerlegung $v = a + w$ genügt $\langle w, \tilde{a}\rangle = 0$ für alle $\tilde{a} \in A$. Wäre $\langle w, \tilde{a}\rangle \neq 0$, gilt $\|w - t\tilde{a}\|^2 < \|w\|^2 = d^2$ für ein geeignetes skalares Vielfaches von $\tilde{a}$ (die Ableitung nach t im Punkt $t = 0$ ist nämlich dann oBdA negativ). Widerspruch! [Beachte, $a - t\tilde{a} \in A$ impliziert $d^2 = d(v, A)^2 \leq \|v - a - t\tilde{a}\|^2 = \|w - t\tilde{a}\|^2 < d^2$]. QED

Selbstdualität von Hilberträumen

Sei V ein Hilbertraum. Das Skalarprodukt induziert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\iota : V \longrightarrow \ V^*$$

definiert durch $\iota(v) = (w \mapsto \langle v, w\rangle)$. Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\|\iota(v)\| = sup_{w\neq 0} \frac{\|\iota(v)(w)\|}{\|w\|} = sup_{w\neq 0} \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|w\|} \leq \|v\|$$

und $\|v\|$ (als Supremum über die $w \neq 0$) wird für $w = v$ angenommen. Es folgt

Satz von Riesz: *ι ist eine $\mathbb{R}$-lineare Isometrie*

$$\boxed{\|\iota(v)\| \ = \ \|v\|} \ ,$$

welche einen isometrischen Isomorphismus induziert

$$\boxed{\iota : V \ \cong \ V^*} \ .$$

Insbesondere ist ein Hilbertraum reflexiv.

Beweis. Da ι als Isometrie injektiv ist, bleibt die Surjektivität von ι zu zeigen. Für $f \in V^*$ ist $A = Kern(f)$ ein abgeschlossener Unterraum von V. Wegen $V = A \oplus A^\perp$ induziert f einen Isomorphismus $V/A \cong A^\perp \cong \mathbb{R}$. Wähle $u \in A^\perp$ mit $\|u\| = 1$. Dann hat die Linearform $\iota(u) \in V^*$ denselben Kern A wie f. Damit ist f proportional zu $\iota(u)$. QED

Hilbertraum Basen

Definition. Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum. Ein System von (abzählbar vielen) Vektoren $e_1, e_2, ...$ eines (separablen) Hilbertraums V mit der **ON-Eigenschaft**

$$\boxed{\langle e_n, e_m \rangle \ = \ \delta_{nm}} \qquad \text{(Kronecker Delta)} \ ,$$

welche einen dichten $\mathbb{R}$-Teilraum U von V aufspannen, nennt man **Hilbertraum Basis**.

Beispiel. Die Standardvektoren $e_1, e_2, ..$ in ℓ^2 bilden eine Hilbertraumbasis des separablen Hilbertraums ℓ^2.

Bem. Wie dieses Beispiel zeigt, ist eine Hilbertraum-Basis keine Basis im Sinn der Linearen Algebra. Auf Grund der ON-Eigenschaft sind die Vektoren $e_1, e_2, ..$ einer Hilbertraum-Basis aber linear unabhängig.

Existenz von Hilbertraum Basen. Sei V separabel (für den allgemeinen Fall siehe [HS], Seite 89ff). Dann existiert eine abzählbare Menge $\mathbb{R}$-linear unabhängiger Vektoren $v_1, v_2, ...$ in V, welche einen dichten $\mathbb{R}$-Unterraum U von V aufspannen. Man kann sukzessive Vektoren e_n finden mit $\|e_n\| = 1$ und

$$e_n \ \in \ \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R} \cdot v_i \ = \ \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R} \cdot e_i \ ,$$

welche orthogonal sind zu $e_1, ..., e_{n-1}$, und zusammen ganz U aufspannen. Man erhält e_n (bis auf Normierung) durch Orthoprojektion von v_n auf $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{R} \cdot v_i$ (Gram-Schmidt Verfahren). Also besitzt jeder separable Hilbertraum eine abzählbare Hilbertraum Basis. Seien V, V' separable nicht endlich dimensionale Hilberträume, dann gilt der folgende

Struktursatz. *Seien $(V, \langle .,. \rangle_V)$ und $(V', \langle .,. \rangle_{V'})$ separable Hilberträume. Für jede Wahl von Hilbertraum Basen $e_1, e_2, ...,$ von $(V, \langle .,. \rangle_V)$ resp. $e'_1, e'_2, ...,$ von $(V', \langle .,. \rangle_{V'})$ existiert ein eindeutig bestimmter isometrischer Isomorphismus*

$$\boxed{\rho : \ V \cong V'}$$

mit $\rho(e_n) = e'_n$ *für* $n \in \mathbb{N}$. *Es gilt*

$$\boxed{\langle \rho(v), \rho(w)\rangle_{V'} \ = \ \langle v, w\rangle_V} \quad , \quad \forall\, v, w \in V\ .$$

Beweis. Es gibt einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$\sigma : U \to U'$$

der $\mathbb{R}$-Vektorräume $U = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}\cdot e_n$ und $U' = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}\cdot e'_n$ definiert durch $\sigma(e_n) = e'_n$, für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\sigma(x) = \sum_{i=1}^N x_n \cdot e'_n \in U'$ für $x = \sum_{i=1}^N x_n \cdot e_n \in U$. Wegen der ON-Eigenschaft der e_n resp. der e'_n gilt $\|x\|_V^2 = \sum_{i=1}^N x_n^2$ sowie $\|\sigma(x)\|_{V'}^2 = \sum_{i=1}^N x_n^2$. Also definiert σ eine isometrisch bijektive Abbildung

$$\|\sigma(x)\|_{V'} \ = \ \|x\|_V \quad , \quad \forall x \in U$$

und damit eine gleichmässig stetige bijektive Abbildung von U nach U'. Diese setzt sich eindeutig zu einer stetigen (isometrisch) bijektiven Abbildung ρ der Komplettierungen fort mit der Eigenschaft $\rho|_U = \sigma$. QED

Korollar. *Jeder separable Hilbertraum unendlicher Dimension ist isometrisch isomorph zum Hilbertraum* ℓ^2.

Gleichmässig konvexe Räume

Ein Banachraum X heisst **gleichmässig konvex**, wenn gilt: *Für beliebige Folgen* v_n *in* X *mit* $\|v_n\| \to 1$ *gilt für* $m \geq n$ *und* $n \to \infty$

$$\boxed{\|\tfrac{v_n+v_m}{2}\| \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \|\tfrac{v_n-v_m}{2}\| \to 0}\ .$$

Beispiel. 1) Hilberträume sind gleichmässig konvex wegen der Parallelogramm Identität. 2) Unterräume von gleichmässig konvexen Räumen sind wieder gleichmässig konvex ebenso wie 3) Quotienten nach abgeschlossenen Unterräumen $A \subseteq X$. [Wegen der nächsten Proposition existieren Representanten $v_n \in X$ von $\overline{v}_n \in X/A$ mit $\|v_n\| = \|\overline{v}_n\| \to 1$. Es gilt dann $\|\frac{\overline{v}_n+\overline{v}_m}{2}\| \leq \|\frac{v_n+v_m}{2}\| \leq \frac{\|v_n\|+\|v_m\|}{2} = \frac{\|\overline{v}_n\|+\|\overline{v}_m\|}{2}$. Aus $\|\overline{v}_n\| \to 1$ und $\|\frac{\overline{v}_n+\overline{v}_m}{2}\| \to 1$ folgt daher dasselbe für die Repräsentanten v_n. Also ist v_n und damit $\overline{v}_n$ eine CF.]

Proposition. *Sei* A *eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines gleichmässig konvexen Banachraumes* X. *Für jedes* v *in* X *existiert ein eindeutig bestimmter Vektor* $a \in A$ *mit*

$$\boxed{d(a, v) = d(A, v) := \inf_{a' \in A} d(v, a')}\ .$$

Beweis. Verbatim wie im Fall der Orthoprojektion bei Hilberträumen. QED

Lemma. *Ist* X *ein gleichmässig konvexer Banachraum, dann existiert für jedes* $f \in X^*$ *ein eindeutig bestimmtes assoziiertes* $x \in X$ *mit* $\|x\| = 1$ *und* $f(x) = \|f\|$.

Beweis. OBdA $\|f\| = 1$. Sei $x_n \in X$ eine Folge mit $f(x_n) \to 1$ und $\|x_n\| \leq 1$ (eine solche existiert immer, sogar mit $\|x_n\| = 1$). Aus

$$f(x_n) \leq |f(x_n)| \leq \|f\| \cdot \|x_n\| = \|x_n\| \leq 1$$

folgt $\|x_n\| \to 1$ im Limes $n \to \infty$. Es gilt aber auch $\|\frac{x_n+x_m}{2}\| \leq 1$ sowie $f(\frac{x_n+x_m}{2}) \to 1$ für $m \geq n$ und $n \to \infty$. Es folgt analog $\|\frac{x_n+x_m}{2}\| \to 1$. Ist X gleichmässig konvex, ist daher x_n eine CF in X und konvergiert gegen einen Grenzwert $x \in X$. Der Grenzwert erfüllt $\|x\| = 1$ und $f(x) = 1$ und hängt nicht von der Wahl der Folge x_n ab (mische solche Folgen). QED

Bemerkung 1. Im Beweis des obigen Lemma hätte man gleichfalls eine Folge $f_m \in X^*$, $\|f_m\| = 1$ betrachten können mit $f_m(x_n) \to 1$ für $m \geq n \to \infty$.

Bemerkung 2. Im obigen Lemma hängt der assoziierte Vektor x stetig[9] von f ab. Die so definierte stetige Abbildung $f \mapsto x$ zwischen den Einheitssphären $S_{X^*} \twoheadrightarrow S_X$ ist surjektiv $[x \in X, \|x\| = 1 \Longrightarrow \exists\ f \in X^*$ mit $\|f\| = 1,\ f(x) = 1$ (Hahn-Banach)].

Satz. *Gleichmässig konvexe Banachräume sind reflexiv.*

Beweis. Für $f_1, .., f_n \in X^*$ ist $A = \bigcap_{i=1}^n Kern(f_i)$ ein abgeschlossener Unterraum von X. Der Quotient $pr : X \to \overline{X} = X/A$ liefert einen normierten Raum $\overline{X}$ versehen mit der Quotientennorm. Da X lokalkonvex ist, ist die Abbildung $pr : E \to \overline{E}$ zwischen den Einheitskugeln surjektiv, denn jedes $\overline{x} \in \overline{E}$ hat wegen der letzten Proposition einen eindeutigen Repräsentant $x \in X$ mit

$$\|x\| = d(x, A) = \|\overline{x}\|_{\overline{X}} .$$

Sei nun $\varkappa \in (X^*)^*$ mit $\|\varkappa\| = 1$. Wie auf Seite 27 folgt die Existenz eines $x = x_n \in E$ mit

$$f_i(x) = \langle \varkappa, f_i \rangle \quad , \quad i = 1, .., n .$$

Wählt man die $f_i, \|f_i\| = 1$ so dass $\lim_n \langle f_n, \varkappa \rangle = 1$, gilt $\|x_n\| = \|\overline{x}_n\| \to \|\varkappa\| = 1$ sowie $f_m(x_n) \to 1$ für $m \geq n \to \infty$. Wie im Beweis des letzten Lemmas (Bemerkung 1) folgt daraus die Konvergenz $x_n \to x$ mit $\|x\| = 1$ und $f_n(x) = \varkappa, f_n\langle$ sowie die Eindeutigkeit des Grenzwert. Aus dieser Eindeutigkeit folgt durch Hinzunahme eines beliebigen $f_0 \in X^*$, $\|f_0\| = 1$ daher ebenfalls $f_0(x) = \langle \varkappa, f_0 \rangle$. QED

Übungsaufgabe. Zeige für lokalkonvexe Räume: *Eine schwach konvergente Folge x_n mit Grenzwert x in X und $\|x_n\| = 1$ konvergiert gegen x in der Normtopologie von X.* [Hinweis: Wähle $f \in X^*$ mit $f(x) = 1$. Dann gilt $f(x_n) \to f(x) = 1$. Benutze $f(\frac{x_n+x_m}{2}) \to 1$ und zeige wie oben $\|\frac{x_n+x_m}{2}\| \to 1$.]

---

[9] OBdA $\|f\| = 1$. Für $f_n \to f$ und $|f_n\| = 1$ in X^* gibt es $x_n \in X$ mit $f_n(x_n) = 1$ und $\|x_n\| = 1$. Es gilt $f_n(x_n) - |(f - f_n)(x_n)| \leq f(x_n)$. Wegen $|(f - f_n)(x_n)\| \leq \|f - f_n\| \to 0$ folgt $\lim_n f(x_n) = 1$ und damit auch $\lim_n f(\frac{x_n+x_m}{2}) \to 1$. Aus $f(\frac{x_n+x_m}{2}) \leq \|f\| \cdot \|\frac{x_n+x_m}{2}\| = \|\frac{x_n+x_m}{2}\| \leq 1$ folgt $\|\frac{x_n+x_m}{2}\| \to 1$. Also ist x_n eine CF in X (lokale Konvexität) und konvergiert $x_n \to x \in X$. Es gilt $f(x) = \lim_n f_n(x_n) = 1$.

Integration

Wir geben in diesem Abschnitt eine kurze Skizze der Lebesgue Integrationstheorie. Für Details siehe etwa das Skript "Mathematik für Physiker".

Halbverbände. Sei X eine Menge. Eine Menge B von Funktionen

$$f : X \to \mathbb{R}^{\pm} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

heisst *Halbverband* mit Werten in $\mathbb{R}^{\pm}$, wenn B unter Addition, Multiplikation mit Skalaren in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und den Bildungen $\min(f,g), \max(f,g)$ abgeschlossen ist. Ist B ein Halbverband mit Werten in $\mathbb{R}^{\pm}$, so ist $-B$ ein Halbverband mit Werten in $\mathbb{R}^{\mp}$.

Verbände. Gilt $B = -B$, nennt man einen Halbverband B einen *Verband*. In diesem Fall sind alle Funktionen f in B reellwertig und B ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man zeigt leicht: Ein Vektorraum B von Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ ist ein Verband genau dann wenn gilt $f \in B \Longrightarrow |f| \in B$.

Integrale. Ein *Integral* auf einem Halbverband B mit Werten in $\mathbb{R}^+$ ist eine Funktion $I : B \to \mathbb{R}^+$, welche *additiv, monoton und halbstetig* ist:

(1) $I(f+g) = I(f) + I(g)$ für alle $f, g \in B$
(2) $I(f) \geq I(g)$ für alle $f, g \in B$ mit $f \geq g$
(3) $f_n \nearrow f$ für Funktionen f_n, f und $n = 1, 2, ...$ impliziert $I(f_n) \nearrow I(f)$

Für Halbverbände mit Werten in $\mathbb{R}^-$ wird gefordert, daß $-I$ ein Integral auf $-B$ ist. Ein Integral I auf einem Verband B ist automatisch <u>reellwertig</u>. Ist B ein Verband, so ist ein Integral I automatisch $\mathbb{R}$-linear und aus Eigenschaft (1) und (2) folgt

$$|I(f)| \ \leq \ I(|f|) \ .$$

[Für $f_{\pm} = \frac{1}{2}(f \pm |f|)$ gilt $f = f_+ + f_-$, $|f| = f_+ - f_-$ sowie $f_+ \geq 0$ und $f_- \leq 0$. Daraus folgert man $|I(f)| \ \leq \ |I(f_+)| + |I(f_-)| \ = \ I(f_+) - I(f_-) \ = \ I(|f|)$.] *Ist die konstante 1-Funktion χ_X in im Verband B, gilt wegen $-\|f\|_\infty \cdot \chi_X \leq f \ \leq \|f\|_\infty \cdot \chi_X$ zusätzlich*

$$\boxed{I(|f|) \ \leq \ \|f\|_\infty \cdot I(\chi_X)} \ .$$

Monotone Hüllen. Ist B ein Halbverband mit Werten in $\mathbb{R}^+$. Dann definiert

$$B^+ = \{f : X \to \mathbb{R}^+ \ \ , \ \exists f_n \in B \ \text{ mit } f_n \nearrow f\}$$

erneut einen Halbverband mit Werten in $\mathbb{R}^+$ (analog definiert man B^- für den $\mathbb{R}^-$-Fall durch monoton fallende punktweise Limiten). Man zeigt leicht $(B^+)^+ = B^+$.

Fortsetzung von Integralen. Für ein Integral I auf B definiert der Grenzwert $I^+(f) = \limsup_n I(f_n)$ für $f_n \nearrow f$, f_n ein wohldefiniertes Integral auf B^+, d.h. $I^+(f)$ ist unabhängig von der Wahl der Folge $f_n \in B$ welche monoton gegen $f \in B^+$ konvergiert! (Analoges gilt im $\mathbb{R}^-$-Fall). Sei $B^{\pm}_{fin} \subseteq B^{\pm}$ die Teilmenge der Funktionen $f \in B^{\pm}$ mit $I^{\pm}(f) \neq \pm\infty$.

Integrierbare Funktionen. Sei B ein Verband auf X und $I : B \to \mathbb{R}$ ein Integral. Eine Funktion $f : X \to \hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ heisst **integrierbar** bezüglich (B, I), wenn es für gegebenes $\varepsilon > 0$ Funktionen $h \in B^-_{fin}$ und $g \in B^+_{fin}$ gibt mit $h \leq f \leq g$ und $|I^+(g) - I^-(h)| < \varepsilon$. Beachte $I^+(g) - I^-(h) = I^+(g) + I^-(-h) = I^+(f - h) \geq 0$, denn für $g \in B^+, h \in B^-$ ist $-h \in B^+$ und $g - h = g + (-h) \in B^+$ und nach Annahme gilt $g-h \geq 0$. Somit ist $I(f) := \liminf_{f \leq g \in B^+} I^+(g) = \limsup_{B^- \ni h \leq f} I^-(h)$ eine wohldefinierte reelle Zahl. Man nennt $I(f)$ das **Integral** der integrierbaren Funktion f. Die Menge der integrierbaren Funktionen sei $\hat{L} = \hat{L}(X, B, I)$.

Der Verband $L(X, B, I)$. *Die* **reellwertigen** *integrierbaren Funktionen bilden einen Verband* $L = L(X, B, I)$ *und* $I(f), f \in L$ *definiert ein Integral auf* L. Es gelten die folgenden fundamentalen Sätze

Satz von Beppo Levi. *Sei* $f_1 \leq f_2 \leq ...$ *eine monotone Folge von Funktionen* $f_n \in \hat{L}$ *mit* $\limsup_n I(f_n) < +\infty$. *Dann ist der monotone Limes* $f_n \nearrow f$ *integrierbar* $f \in \hat{L}$ *mit Integral*

$$I(f) = \lim_n I(f_n) \ .$$

Satz von der dominierten Konvergenz (**Lebesgue**). *Sei* $g \in \hat{L}$ *und sei* $f_n \to f$ *eine punktweise konvergente Folge von Funktionen* $f_n \in \hat{L}$ *mit der Majorante* $|f_n| \leq g$. *Dann gilt* $f \in \hat{L}$ *sowie*

$$I(f) = \lim_n I(f_n) \ .$$

Die L^p-Räume

Für einen metrischen Raum X betrachten wir ein **Radon Integral** I auf X, d.h. eine montone $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $I : B = C_c(X) \to \mathbb{R}$ auf dem *Verband* $B = C_c(X)$ *der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger* auf X. Dabei nehmen wir an

- X sei *lokalkompakt*
- X sei *abzählbar kompakt*, d.h. eine abzählbare Vereinigung $X = \bigcup_{N=1}^{\infty} K_N$ von Kompakta K_N (oBdA $K_1 \subseteq K_2 \subseteq ...$).

Wegen der ersten Annahme ist I automatisch halbstetig, d.h. ein Integral auf $B = C_c(X)$.

Zur Erinnerung. Für kompaktes $A \subseteq X$ sei $C_A(X)$ der Teilraum von $C(X)$ aller stetigen Funktionen auf X, welche ausserhalb von A verschwinden. Dann ist $C_c(X) = \bigcup_A C_A(X)$ (Vereinigung über alle kompakten Teilmengen A von X).

Sei $L = L(X) = L(X, I)$ der Verband der reellwertigen Lebesgue integrierbaren Funktionen auf X bezüglich des Integrals I auf dem Verband $B = C_c(X)$. Eine **Nullmenge** $Y \subset X$ ist eine Teilmenge, deren charakteristische Funktion χ_Y in $L(X)$ liegt mit Integral $I(\chi_Y) = 0$. Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge. Für jede

Lebesgue integrierbare Funktion f ist die Menge der Punkte $x \in X$, wo f keine reellen Werte annimmt, eine Nullmenge. Eine Lebesgue integrierbare Funktion f kann man auf einer Nullmenge beliebig abändern ohne die Integrierbarkeit oder das Integral zu ändern. Notation: Eine Aussage gilt *f.ü. auf* X, wenn sie ausserhalb einer Nullmenge gilt.

Eine reellwertige Funktion f auf X heisst **messbar**, wenn sie auf X f.ü. punktweiser Limes $f_n \to f$ einer Folge $f_n \in C_c(X)$ ist. Wir benutzen (ohne Beweis; siehe Skript Mathematik für Physiker) folgenden

Satz. *Die Menge* $M(X) = M(X,I)$ *der messbaren Funktionen auf* X *definiert einen Verband und eine Algebra mit 1. Abzählbare Suprema und Infima messbarer Funktion sind wieder messbar. Ist* f *messbar, dann auch* $|f|^p$. *Ein f.ü. punktweiser Limes messbarer Funktionen ist wieder messbar, und es gilt*

$$\boxed{f \in M(X)\ ,\ |f| \leq g\ ,\ g \in L(X) \Longrightarrow f \in L(X)}\ .$$

Für reellwertige Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ gelten die trivialen Abschätzungen

(1) $|\overline{f} \cdot g| \leq \max(|f|,|g|)^2 = \max(|f|^2, |g|^2)$
(2) $|f+g|^p \leq 2^p \cdot \max(|f|^p, |g|^p)$.

Wir definieren $\mathcal{L}^p(X,I) = \mathcal{L}^p$ als Teilraum der *messbaren Funktionen* $M(X)$ für $1 \leq p < \infty$

$$\boxed{\mathcal{L}^p(X,I)\ =\ \Big\{f \in M(X)\ \Big|\ |f|^p \in L(X)\Big\}}\ .$$

Lemma. $\mathcal{L}^p$ *ist ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum.*

Beweis. $M(X)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Daher folgt die Behauptung aus der obigen Abschätzung (2) und dem letzten Satz, denn $f, g \in \mathcal{L}^p$ impliziert $|f|^p, |g|^p \in L(X) \cap M(X)$ und damit $2^p \max(|f|^p, |g|^p) \in L(X)$ (Verbandseigenschaft). Dies ist eine Majorante für $|f+g|^p \in M(X)$. Es folgt $|f+g|^p \in L(X)$. QED

Man definiert nun für $f \in \mathcal{L}^p$ den Wert

$$\|f\|_p\ =\ I(|f|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\ .$$

Lemma.$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow$ *Träger von* f *ist eine Nullmenge.*

Beweis. $\Leftarrow$ klar. $\Rightarrow$: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $vol\{x \in X \mid |f|^p \geq 1/n\} = 0$ wegen der Abschätzung $\frac{1}{n} \cdot vol(..) \leq \|f\|_p^p$ und $\|f\|_p = 0$. Nach Beppo Levi folgt im Limes $vol\{x \in X | |f| > 0\} = 0$. QED

Die **Nullfunktionen** (Funktionen in $\mathcal{L}^p$, die ausserhalb einer Nullmenge verschwinden) bilden einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$. Der Quotientenraum sei $L^p = \mathcal{L}^p/\{\text{Nullfunktionen}\}$.

Die Werte $\|f\|_p$ und $\langle f, g\rangle$ hängen offensichtlich nur von der Äquivalenzklasse von f und g in L^p ab, und $\|f\|_p = 0$ gilt genau dann wenn $f = 0$ in L^p. Wie im Falle der kleinen ℓ^p-Räume zeigt man jetzt die Höldersche Ungleichung und die Minkowski Ungleichung. Der Beweis überträgt sich verbatim indem man im dortiogen Beweis jeweils $\sum_n$ durch $I(.)$ ersetzt. Insbesondere zeigt dies

Lemma. *Die Räume $L^p = L^p(X, I)$ sind normierte Räume bezüglich $\|.\|_p$.*

Ein analoges Argument zeigt mit der obigen Abschätzung (1) : $f, g \in \mathcal{L}^2 \Longrightarrow fg \in L(X)$. Somit definiert

$$< f, g > = \ I(f \cdot g)$$

für $f, g \in \mathcal{L}^2$ eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform

$$< ., . >: \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \to \mathbb{R} \ .$$

Also ist L^2 ein Prä-Hilbertraum. Wir zeigen im nächsten Abschnitt die Vollständigkeit der Räume $(L^p, \|.\|_p)$. Dies zeigt dann

Korollar. $(L^2(X, I), \|.\|_2)$ *ist ein Hilbertraum.*

Achtung. L^p-Konvergenz impliziert nicht die punktweise Konvergenz f.ü. und punktweise Konvergenz f.ü. impliziert nicht L^p-Konvergenz. [Betrachte dazu $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$ in $L^p(\mathbb{R})$ bzw. $f_n(x) = \chi_{[s_n,s_{n+1}]}$ in $L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ für $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ und reelle Nullfolgen $x_n > 0$ mit $\sum_{i=1}^\infty x_i = \infty$].

Vollständigkeit von $L^p(X)$

Satz von Fischer-Riesz. $(L^p(X, I), \|.\|_p)$ *ist vollständig.*

Beweis. Alle im Beweis auftretenden Funktionen f_n, f, g_n, g sind messbar, somit diskutieren wir nur die Integrierbarkeit. Wir müssen zeigen, dass jede CF f_n in L^p konvergiert. *Präparation.* Durch Übergang zu einer Teilfolge gilt oBdA

$$\|f_n - f_m\|_p \le 2^{-min(n,m)} \ .$$

Majorantenfolge. Wir definieren eine monotone Hilfsfolge von Funktionen $g_n \in L^p(X)$

$$g_1 = 0 \ , \ g_n = |f_1| + |f_1 - f_2| + \cdots + |f_n - f_{n-1}| \quad \text{für } n \ge 2$$

und ihren Limes $g_n \nearrow g$ (mit Werten in $\mathbb{R}^+$). Wir zeigen die Beschränkheit von $I(|g_n|^p)$ und damit $g \in \mathcal{L}^p$ (wegen Beppo Levi):

$$I(|g_n|^p) = \|g_n\|_p^p \le (\|f_1\|_p + \sum_{n\ge2} \|f_n - f_{n-1}\|_p)^p \le (\|f_1\| + 1)^p < \infty \ .$$

Punktweise Konvergenz. Wegen $g_n(x) \to g(x)$ punktweise f.ü. (im Komplement der Unendlichkeitsstellen der g_n, g) ist $g_n(x) \in \mathbb{R}$ für festes $x \in X$ eine reelle CF f.ü. Dasselbe gilt für $f_n(x)$ wegen

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{n+1}^{m} |f_k(x) - f_{k-1}(x)| = g_m(x) - g_n(x) \quad , \quad m > n \ .$$

Es gibt daher eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f_n \to f$ punktweise f.ü.

Majorante. Aus $|f_n| \leq |f_1| + \sum_{k=2}^{n} |f_k - f_{k-1}| \leq g_n \leq g$ für alle $n \geq 2$ folgt $|f_n|^p \leq g^p$ und damit $|f|^p \leq g^p$ sowie dann $|f - f_n|^p \leq (2g)^p$. Aus $M(X) \ni |f - f_n|^p \leq (2g)^p \in L(X)$ folgt $|f-f_n|^p \in L(X)$. Wegen $|f_n-f|^p \to 0$ punktweise f.ü. und $L(X) \ni |f-f_n|^p \leq (2g)^p \in L(X)$ folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\lim_n I(|f - f_n|^p) = I(\lim_n |f - f_n|^p) = 0 \ .$$

Dies zeigt $\lim_n \|f - f_n\|_p = 0$. QED

Separabilität von $L^p(X)$

Nach Annahme ist X lokalkompakt.

Lemma 1. *Ist X lokalkompakt und $K \subseteq X$ kompakt, gilt $\chi_K \in B^-_{fin}(X) \subset L(X) \cap M(X)$ und insbesondere $vol(K) < \infty$.*

Beweis. χ_K liegt in $B_{fin}(X)$, denn es gibt es eine monoton fallende punktweise konvergente Folge stetiger Funktion $f_n = \chi_{K,n}$, welche gegen χ_K konvergiert. Aus Beppo Levi folgt dann $\chi_K \in L(X)$. QED

Lemma 2. *Sei K kompakt und $f \in L^p(X)$, dann ist $\chi_K \cdot f \in L^p(X)$.*

Beweis. Es gilt $0 \leq \chi_{K,n} \cdot |f|^p \nearrow \chi_K \cdot |f|^p$ mit Majorante $|f|^p \in L(X)$. Aus $\chi_{K,n} \cdot |f|^p \in M(X)$ folgt daher $\chi_{K,n} \cdot |f|^p \in L(X)$. Aus Beppo Levi folgt dann $\chi_K |f|^p \in L(X)$. QED

Nach Annahme ist X *abzählbar kompakt.* Für eine aufsteigende Kette von Kompakta K_N gilt $X = \bigcup_{N=1}^{\infty} K_N$.

Lemma 3. *Für $f \in L^p(X)$ hat man $\lim_N \|f - \chi_{K_N} \cdot f\|_p = 0$, d.h. in $(L^p(X), \|.\|_p)$ gilt*

$$\boxed{\lim_N \chi_{K_N} \cdot f = f} \ .$$

Beweis. OBdA ist $f \geq 0$. Dann folgt die Aussage aus Lemma 2 und Beppo Levi. QED

Zur Erinnerung: $B(X) = C_c(X)$ (*Radon Maß*). Daraus folgt

Lemma 4. *$C_c(X)$ liegt dicht in $(L^p(X), \|.\|_p)$.*

Beweis. Schritt 1. Wegen $\lim_n(\min(n,f)) \to f$ in $L^p(X)$, kann man obdA f durch $\tilde{f} = \min(n,f)$ ersetzen. Somit ist oBdA f durch eine Konstante C nach oben beschränkt, und dann analog auch durch $-C$ nach unten. Sei als oBdA $|f| \leq C$.

Schritt 2. Für $\varepsilon > 0$ existieren nach Definition $h \in B^-_{fin}(X)$ und $h_n \in B(X) = C_c(X)$ mit $h_n \searrow h$ so dass für $n >> 0$ gilt $I(|f-h|) \leq I(|g-h|) < \varepsilon$ und $I(|h-h_n|) < \varepsilon$, also $I(|f-h_n|) < 2\varepsilon$. Dies bleibt richtig, wenn man h, h_n nach oben und unten bei $\pm C$ abschneidet. Sei also oBdA $|h_n| \leq C$. Wegen $|(|f-h_n)| \leq 2C$ folgt

$$\|f-h_n\|_p^p = I(|f-h_n|^p) \leq (2C)^{p-1} \cdot I(|f-h_n|) < (2C)^{p-1}\varepsilon \ .$$

Satz. *$L^p(X)$ ist separabel für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Wegen Lemma 4 liegt $C_c(X)$ dicht in $L^p(X)$. Wegen Lemma 3 liegt dann $\sum_{N=1}^\infty \chi_{K_n} \cdot C_c(X)$ dicht in $L^p(X)$. Wir können uns daher auf einen einzelnen der abzählbar vielen Räume $\chi_K \cdot C_c(X)$ konzentrieren ($K = K_N$ für festes N). Wie im Abschnitt über lokal kompakte Räume gezeigt wurde, gibt es dazu einen abzählbar erzeugten Teilraum $V \subset C_A(X) \subset C_c(X)$, so dass für jedes $f \in \chi_K \cdot C_c(X) = C(K)$ (durch Null fortgesetzt auf X) eine Folge $f_n \in V$ existiert mit $\|f-f_n\|_\infty = sup_{x\in X}|f(x)-f_n(x)| \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen $\|f-f_n\|_p \leq I(\chi_A) \cdot \|f-f_n\|_\infty^p$ folgt dann $f_n \to f$ in $(L^p, \|.\|_p)$. Die Summe der V (gebildet für alle N) ist abzählbar erzeugt in L^p und liegt dicht. QED

Bemerkung. Für die im Folgenden benutzten Bezeichnungen verweisen wir auf den Abschnitt über lokalkompakte metrische Räume. Für $K \subset A$ wie dort ist die Einschränkungsabbildung $res : C(A) \twoheadrightarrow C(K)$ surjektiv (Satz von Tietze), und wegen der χ_K, n-Funktionen ebenfalls $res : C_A(X) \twoheadrightarrow C(K)$. Für $f \in C(K)$ wähle $g \in C_c(X)$ mit $res(g) = f$. Dann ist $I_K(f) = I(\chi_K \cdot g)$ unahängig von der Wahl von f, also ein wohldefiniertes Integral auf X. [Beachte $\chi_K \cdot g \in L(X)$. Wir fassen in diesem Sinn g auch als Objekt in $L(X)$ auf, fortgesetzt durch Null ausserhalb von K. Somit gilt für $g_n \nearrow g$ mit $g_n, g \in C(K)$ also $\lim_n I_K(g_n) = \lim_n I(g_n) = I(g) = I_K(g)$.] Wegen $C(K) \subset \chi_K \cdot C_A(X) \subset \chi_K \cdot L(X)$ definiert I_K ein Radon Integral auf K, und dieses Maß definiert einen Raum $L^p(K)$. Man zeigt nun leicht $res : L^p(X) \twoheadrightarrow L^p(X)$. In der Tat kann man $L^p(K)$ mit dem abgeschlossenen Unterraum der $f \in L^p(X)$ mit Träger in K (f.ü.) identifizieren.

Verallgemeinerte Parallelogramm Identitäten

Die beiden nächsten Abschnitte dienem dem interessierten Leser zur weiteren Vertiefung, wurden aber in der Vorlesung nicht behandelt.

Für die $L^p(X)$-Räume gelten verallgemeinerte Parallelogramm Identitäten: Für $2 \leq q < \infty$ und damit $1 < p \leq 2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist

- $\|f+g\|_q^q + \|f-g\|_q^q \leq 2^{q-1}(\|f\|_q^q + \|g\|_q^q)$
- $\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{q-1}$

Zum Beweis macht man die Transformation $f \to f+g, g \to f-g$ und zeigt stattdessen

Lemma. *Für* $1 < p < 2 \Longleftrightarrow 2 < q < \infty$ *und* $1/p + 1/q = 1$ *gilt*

(1) $\|f\|_q^q + \|g\|_q^q \leq \frac{1}{2}(\|f+g\|_q^q + \|f-g\|_q^q)$ *sowie*

(2) $(\|f\|_p^q + \|g\|_p^q)^{\frac{p}{q}} \leq \frac{1}{2}(\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p)$.

Beweis. Wir zeigen dies zuerst für reelle Zahlen. Die Funktion $a_q(x) := \frac{1}{2}|x+1|^q + \frac{1}{2}|x-1|^q$ ist differenzierbar für $x \in [1,\infty)$ (resp. $x \in [0,1]$). Dann sind (1) resp. (2) äquivalent zu

$$1 + x^q \ \leq \ a_q(x) \quad \text{resp.} \quad (1+x^q)^{p/q} \ \leq \ a_p(x) \quad \text{für} \quad x \geq 1 \ .$$

Da dies für $x = 1$ und $x = \infty$ stimmt, genügt $q\xi^{q-1} \neq qa_{q-1}(\xi)$ resp. $p(1+\xi^q)^{(p-q)/q}\xi^{q-1} \neq pa_{p-1}(\xi)$ für die Ableitungen im Bereich $\xi \geq 1$. Diese Ungleichheiten folgen für $0 < \eta := \xi^{-1} < 1$ aus $a_{\tilde{q}}(\eta) > 1$ [Richtig für $\eta = 1$ mit Gleichheit für $\eta = 0$. Wegen $\tilde{q} = q-1 \geq 1$ ist die Ableitung $a'_{\tilde{q}}(\eta) = \tilde{q}(1+\eta)^{\tilde{q}-1} - \tilde{q}(1-\eta)^{\tilde{q}-1} > 0$ für $\eta > 0$] resp. $(1+\eta^q)^{(p-q)/q} < a_{p-1}(\eta)$ [Die linke Seite ist < 1, denn $(p-q)/q < 0$. Die rechte Seite ist > 1 wegen der Monotonie $a'_{p-1}(\eta) > 0$ (benutze $p-1 > 0$) und $a_{p-1}(0) = 1$]. Um vom reellen Fall auf den Fall $f, g \in L^p(X)$ zu schliessen, benutzt man den nächsten Hilfssatz. QED

Hilfssatz. *Für* $k > 1$ *und* $f, g \in L(X)$ *gilt* $(I(|f|)^k + I(|g|)^k)^{\frac{1}{k}} \leq I(((|f|)^k + I(|g|)^k)^{\frac{1}{k}})$.

Beweis. Nach Hölder gilt $x_1y_1 + x_2y_2 \leq (y_1^k + y_2^k)^{\frac{1}{k}}$ für $(x_1^l + x_2^l)^{\frac{1}{l}} = 1$ und $1/k + 1/l = 1$. Es folgt $x_1I(|f|) + x_2I(|g|) \leq I(|f|^k + |g|^k)^{\frac{1}{k}}$ für $y_1 = I(|f|)$ und $y_2 = I(|g|)$. Bildet man das Supremum über alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1^l + x_2^l)^{\frac{1}{l}} = 1$, folgt daraus wegen $(\ell^l)^* = \ell^k$ und dem Normlemma $(I(|f|)^k + I(|g|)^k)^{\frac{1}{k}} \leq I(y_1^k + y_2^k)^{\frac{1}{k}} = I(((|f|)^k + I(|g|)^k)^{\frac{1}{k}})$. QED

Daraus folgt

Satz. *Für* $1 < p < \infty$ *sind die Räume* $L^p(X)$ *gleichmässig konvex und damit reflexiv.*

Satz. *Sei* X *lokalkompakt und abzählbar im Unendlichen. Für* $1 < p < \infty$ *gibt es dann einen* <u>*isometrischen*</u> *Isomorphismus* $\lambda : L^q(X) \cong L^p(X)^*$.

Beweis. Wie bei den ℓ^p-Räumen zeigt man die Existenz einer isometrischen Einbettung

$$\lambda : L^q(X) \hookrightarrow L^p(X)^* \ .$$

Das Bild von λ ist daher vollständig, also insbesondere abgeschlossen in $L^p(X)^*$. Wäre λ nicht surjektiv, gäbe es nach Hahn-Banach eine stetige Linearform $F \neq 0$ auf $L^p(X)^*$, welche auf $Bild(\lambda)$ verschwindet [Betrachte dazu den Quotient $L^p(X)/Bild(\lambda)$]. Wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde ist $L^p(X)$ reflexiv. Also gibt es ein $f \in L^p(X)$ mit $i_{L^p(X)}(f) = F$. Es folgt $\langle g, f\rangle = F(g) = 0$ für alle $g \in L^q(X)$. Wegen $L^p(X) \hookrightarrow L^q(X)^*$ folgt daher $f = 0$. Ein Widerspruch zu $F \neq 0$. QED

Ein zweiter Beweis für $L^p(X)^* = L^q(X)$

Sei X ein **kompakter** metrischer Raum, I ein Integral auf $B = C_c(X) = C(X)$. Per Definition ist dann $\chi_X \in C(X)$ integrierbar mit endlichem Volumen

$$\boxed{vol(X) = I(\chi_K) < \infty} .$$

Aus $\chi_X = |\chi_X|^\mu \in L(X)$ folgt $\chi_X \in L^\mu(X)$ für alle μ. Insbesondere gilt

Lemma. *Ist Fall $vol(X) < \infty$ gilt $f \in L^p(X)$ für jede beschränkte messbare Funktion f.*

Lemma. *Im Fall $vol(X) < \infty$ gibt es für $1 \leq p < k \leq \infty$ stetige Einbettungen*

$$\boxed{L^k(X) \hookrightarrow L^p(X)} \quad , \quad (p < k) .$$

Beweis. Sei $p \leq k = p\lambda$ und $1/\lambda + 1/\mu = 1$. Für $f \in L^k(X)$ gilt $|f|^p \in L^\lambda(X)$. Also

$$I(|f|^p)| = | \ \langle |f|^p, \chi_X \rangle \ | \ \leq \ \|\chi_X\|_\mu \cdot \| \ |f|^p \ \|_\lambda \quad \text{(Hölder)}$$

oder $I(|f|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\chi_X\|_\mu^{\frac{1}{p}} \cdot I(|f|^k)^{\frac{1}{k}}$. Also $\|f\|_p \leq c \cdot \|f\|_k$ für eine Konstante c. QED

Satz. *Sei X lokalkompakt und abzählbar kompakt. Für $1 < p < \infty$ gibt es dann einen* <u>*isometrischen*</u> *Isomorphismus $\lambda : L^q(X) \cong L^p(X)^*$ (sowie $\lambda : L^1(X)^* \cong L^\infty(X)$).*

Beweis. Man hat isometrische Einbettungen $\lambda : L^q(X) \hookrightarrow L^p(X)^*$ wie bei den ℓ^p-Räumen. Es bleibt die Surjektivität zu zeigen: Sei $F \in L^p(X)^*$.

Für eine Folge $w_N \in L^q(X)$ sei $v_N(x) := sign(w_N(x))|w_N(x)|^{q-1}$ die assoziierte Folge in $L^p(X)$ wie im ℓ^p-Fall. Man zeigt dann analog zum ℓ^p-Fall (*)

$$|\langle w_N, v_N \rangle| \leq |F(v_N)| \Longrightarrow \|w_N\|_q \leq \|F\| .$$

Reduktion auf den kompakten Fall. Angenommen der Satz gilt für kompakte Räume. Es gibt eine aufsteigende Folge von Kompakta K_N mit $X = \bigcup_N K_N$. Die Linearform F definiert Einschränkungen $F_N := F|_{L^2(K_N)} \in (L^p(K_N))^*$. Da K_N kompakt ist, gilt $F_N = \lambda(w_N)$ für $w_N \in L^q(K_N)$. Wegen $w_{N+1}(x)|_{K_N} = w_N(x)$ f.ü. verheften sich die w_N zu einer Funktion $w \in M(X)$. Aus $F_N(v_N) = F(v_N)$ folgt $\|w\|_q \leq \limsup_N \|w_N\|_q \leq |F\|$ wegen (*), also $w \in L^q(X)$. Es gilt $F = \lambda(w)$, denn die Linearformen F und $\lambda(w)$ stimmen auf dem dichten Teilraum $\bigcup_N L^p(K_N)$ von $L^p(X)$ überein.

Der kompakte Fall ($p \leq 2$). Dann ist $L^2(X) \hookrightarrow L^p(X)$ eine stetige dichte Inklusion. Jedes $F \in L^p(X)^*$ induziert daher eine stetige Linearform auf $L^2(X)$. Wegen $L^2(X)^* \cong L^2(X)$ (Hilbertraum!) gilt $F|_{L^2(X)}(v) = I(vw)$ für ein $w \in L^2(X)$ und alle v aus dem dichten Teilraum $L^2(X)$. Für jedes N liegt die beschränkte Funktion $w_N = sign(w)\max(N, |w|)$ in $L^q(X)$ und die assozierte beschränkte Funktion v_N in $L^p(X)$. Nach (*) folgt aus

$$|\langle w_N, v_N \rangle| = I(max(N, |w|)^q) \leq F(v_N) = I(max(N, |w|)^{q-1}|w|)$$

daher $\|w_N\|_q \leq \|F\|$ und damit wegen $w_N \nearrow w$ und Beppo Levi $w \in L^q(X)$. Es folgt $F = \lambda(w)$, denn die stetigen Linearformen $\lambda(w)$ und F stimmen auf dem dichten Teilraum $L^2(X)$ von $L^p(X)$ überein.

Der kompakte Fall ($p \geq 2$). Jetzt gibt es stetige Inklusionen $L^p(X) \hookrightarrow L^2(X) \hookrightarrow L^1(X)$. Für $F \in L^p(X)^*$ (oBdA mit $\|F\| \leq 1/2$) gilt $|F(f)| \leq \frac{1}{2}\|f\|_p$. Für kompaktes oder allgemeiner jedes $Y \subseteq X$ mit $\chi_Y \in L(X)$ gilt daher $|F(\chi_Y)| \leq \frac{1}{2} \cdot vol(Y)$. Für $J := I + F$ folgt für Y mit $\chi_Y \in L(X)$

$$\frac{1}{2} \cdot vol(Y) \leq J(\chi_Y) \leq \frac{3}{2} \cdot vol(Y) \ .$$

Sei $K(X) \subset L(X)$ der Verband, der als $\mathbb{R}$-Vektorraum von den Funktionen χ_E der kompakten Teilmengen E von X erzeugt wird. Dann ist $J : K(X) \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-lineare monotone[10] Funktion. Aus der Linearität und Monotonie von J und wegen $J(X) < \frac{3}{2}vol_I(K)$ folgt die $\|.\|_\infty$-Stetigkeit von J:

$$|J(f)| \ \leq \ J(|f|) \ \leq \ \frac{3}{2} \cdot I(|f|) \ \leq \ \frac{3}{2}vol_I(K) \cdot \|f\|_\infty \quad , \quad \forall \ f \in K(X) \ .$$

Da jede stetige Funktion auf X gleichmässiger Limes von Funktionen in $K(X)$ ist (Stetigkeit auf einem Kompaktum impliziert gleichmässige Stetigkeit,) lässt J sich stetig zu einem $\mathbb{R}$-linearen monotonen Funktional auf $C(X)$ fortsetzen. Nach dem Satz von Dini[11] ist J dann sogar ein Integral, d.h. J ist $\mathbb{R}$-linear, monoton und halbstetig. Weiterhin gilt dann

$$0 \leq \frac{1}{2} \cdot I(f) \leq J(f) \leq \frac{3}{2} \cdot I(f) \quad , \quad \forall \ \ 0 \leq f \in C(X) \ .$$

Daraus folgt leicht $L(X, C(X), I) = L(X, C(X), J)$. Das heisst, J setzt sich stetig auf $L^1(X) = L(X, C(X), I)/\text{Nullfunktionen}$ fort. Da $K(X)$ dicht in $L^p(X) \subset L^1(X)$ liegt und $J - I$ mit der Einschränkung von F auf $K(X)$ übereinstimmt, folgt aus der Stetigkeit von $J - I$ (auf $L^1(X)$ und damit auch auf den Unterräumen $L^2(X)$, $L^p(X)$ etc.) und der Stetigkeit von F auf $L^p(X)$ die Gleichheit $F = J - I$ auf $L^p(X)$. Also lässt sich F, genau genommen $J - I$, auf $L^1(X)$ und damit auf den Teilraum $L^2(X) \hookrightarrow L^1(X)$ stetig fortsetzen. Man schliesst dann weiter wie im Fall $p \leq 2$. QED

---

[10]Jedes $f \in K(X)$ ist eine endliche Linearkombination $f = \sum_E c_E \chi_E$ für Konstanten $c_E \in \mathbb{R}$ und Kompakta $E \subseteq X$. Für Kompakta $E_1, .., E_n$ zerfällt X in die 2^n disjunkten Mengen $Y_I = \bigcap_{i \in I} E_i \cap \bigcap_{i \notin I} E_i^c$ mit $I \subseteq \{1, ..., n\}$. Für das Komplement Y^c einer Menge $Y \subseteq X$ mit $\chi_Y \in L(X)$ gilt $\chi_{Y^c} = 1 - \chi_Y \in L(X)$. Wegen $\chi_{Y \cap Y'} = min(\chi_Y, \chi_{Y'})$ und wegen $\chi_{E_i} \in L(X)$ für Kompakta E_i, gilt daher $\chi_Y \in L(X)$ für alle $Y = Y_I$. Daher ist jedes $f \in K(X)$ eine endliche Linearkombination $f = \sum_Y d_Y \chi_Y$ gebildet zu endlich vielen disjunkten (!) Mengen $Y \subset X$ mit $\chi_Y \in L(X)$. Aus $f \geq 0$ folgt daher $d_Y \geq 0$, also $J(f) = \sum_Y d_Y J(\chi_Y) \geq 0$ wegen $J(\chi_Y) \geq \frac{1}{2}I(\chi_Y) \geq 0$. Ditto $\frac{3}{2}I(f) \geq J(f)$. Bemerkung: Die $Y = Y_I$ sind im allgemeinen nicht mehr kompakt.

[11]Dini: Ein monotoner Limes $f_n \nearrow f$ stetiger Funktionen f_n auf einem Kompaktum X mit stetiger Grenzfunktion f ist ein gleichmässig konvergenter Limes. d.h. es gilt $\lim_n \|f - f_n\|_\infty = 0$. Jedes $\mathbb{R}$-lineare monotone Funktional $J : C(X) \to \mathbb{R}$ definiert daher ein Integral.

Kompakte Operatoren

Definition. Eine stetiger Operator $F \in L(X,Y)$ zwischen Banachräumen X,Y heisst **kompakt**, wenn das Bild $F(E)$ der Einheitskugel E von X relativ-kompakt in Y ist bzgl. der Normtopologie von Y.

Eine äquivalente Formulierung: *Für jede beschränkte Folge $x_n \in X$ enthält die Bildfolge $F(x_n)$ eine in $(Y, \|.\|_Y)$ konvergente Teilfolge.*

Lemma. *Die kompakten Operatoren $K(X,Y)$ definieren einen bezüglich der Normtopologie abgeschlossenen Unterraum des Banachraums $L(X,Y)$. Für jeden weiteren Banachraum Z gilt $L(Y,Z) \circ K(X,Y) \subseteq K(X,Z)$ sowie $K(Y,Z) \circ L(X,Y) \subseteq K(X,Z)$.*

Beweis. Für $F_n \in K(X,Y)$ mit $F_n \to F$ sei $x_1, x_2, ..$ eine Folge mit $\|x_n\|_X \leq C$. Für eine Teilfolge $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..$ konvergiert dann die Bildfolge obdA mit $\|F_1(x_n^{(1)}) - F_1(x_m^{(1)})\| < 2^{-\min(m,n)}$. Geht man zu einer weiteren Teilfolge $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..$ über gilt oBdA $\|F_2(x_n^{(2)}) - F_2(x_m^{(2)})\| < 2^{-\min(m,n)}$ usw. Für die diagonale Teilfolge $\xi_n = x_n^{(n)}$ gilt

$$\|F(\xi_n) - F(\xi_m)\| \leq \|F - F_k\| \|\xi_n\| + \|F_k(\xi_n) - F_k(\xi_m)\| + \|F - F_k\| \|\xi_m\| \ .$$

Wegen $\|F - F_k\| \to 0$, $\|\xi_n\|, \|\xi_m\| \leq C$ und $\|F_k(\xi_n) - F_k(\xi_m)\| \leq 2^{-\min(m,n)}$ für $m, n \geq k$ ist $F(\xi_n)$ eine CF und damit konvergent in Y. Also ist $K(X,Y)$ abgeschlossen. Die Unterraumeigenschaft von $K(X,Y)$ folgt wegen $F_1 + F_2 = sum \circ (F_1 \times F_2) \circ diag$ aus den letzten Aussagen des Lemmas über Zusammensetzungen von Operatoren. Diese Aussagen folgen aber unmittelbar aus der Definition kompakter Operatoren, den üblichen Eigenschaften stetiger linearer Abbildungen und der Tasache, dass stetige Abbildungen Kompakta in Kompakta abbilden. QED

Fredholmoperatoren

Seien X, Y Banachräume.

Definition. Abbildungen F in $L(X,Y)$ mit
(1) $\dim(Kern(F)) < \infty$
(2) $\dim(Kokern(F)) < \infty$
heissen **Fredholmoperatoren**.

Lemma. *Der Kern eines Fredholmoperators F ist* **abgeschlossen** *in X.*

Beweis. Jeder (!) endlich dimensionale Teilraum A eines Banachraums X ist vollständig, und damit auch automatisch abgeschlossen in X. QED

Bem. Darüber hinaus besitzt jeder endlich dimensionale Unterraum A ein (nicht eindeutig bestimmtes) **abgeschlossenes Komplement** A^c mit $X = A \oplus A^c$ [oBdA zuerst $\dim(A) = 1$, wo dies sofort aus dem Satz von Hahn-Banach folgt. Betrachte dann den Quotient usw.].

Lemma. *Das Bild $F(X)$ eines Fredholmoperators ist* **abgeschlossen** *in Y.*

Beweis. F sei injektiv [ersetze sonst X durch $X/Kern(F)$]. Sei V ein endlich dimensionaler Unterraum von Y mit $F(X) \oplus V = Y$. X als Summand ist ein abgeschlossener Teilraum des Banachraums $X \oplus V$, und $f(x, v) = F(x) + v$ definiert eine stetige Bijektion $f : X \oplus V \to Y$. Diese ist ein Homöomorphismus (Satz von der offenen Abbildung). Also ist $f(X) = F(X)$ abgeschlossen in Y. QED

Lemma. *Sei X ein Banachraum. Für $k \in K(X, X)$ ist $F = id_X + k$ ein Fredholmoperator.*

Beweis. Aus $x \in Kern(F)$ folgt $-x = k(x) \in k(X)$. Somit ist die Einheitskugel E von $Kern(F)$ relativ kompakt in der Normtopologie, also $\dim Kern(F) < \infty$.

$Bild(F)$ ist abgeschlossen in X, denn für jede konvergente Folge $F(x_n) = x_n + k(x_n) \to y$ in $Bild(F)$, oBdA mit x_n in einem abgeschlossenen Komplement A^c von $A = Kern(F)$, bleibt x_n beschränkt[12]. Damit ist oBdA $k(x_n) \to \eta$ konvergent (k ist kompakter Operator). Also $x_n \to x := y - \eta$. Da k stetig ist, folgt $k(x) = \eta$ und $y = x + \eta = x + k(x) \in Bild(F)$.

Die Einheitskugel E von $X/F(X)$ hat Repräsentanten der Norm $\leq C$ in X für eine Konstante C (Satz von der offenen Abbildung) und damit Repräsentanten in $C \cdot k(E)$ wegen $-x = k(x) - F(x) \equiv k(x) \bmod F(X)$. Da das Bild von $C \cdot k(E)$ in X und damit auch in $X/F(X)$ relativ kompakt ist, folgt $\dim(Kokern(F)) < \infty$. QED

Der Index

Für einen Fredholmoperator $F : X \to Y$ definiert man den Index

$$\boxed{\chi(F) = \dim(Kern(F)) - \dim(Kokern(F))}\ .$$

Satz. *Sind $F : X \to Y$ und $G : Y \to Z$ Fredholmoperatoren, dann ist $G \circ F : X \to Z$ ein Fredholmoperator und es gilt* $\boxed{\chi(G \circ F) = \chi(G) + \chi(F)}$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der langen exakten Sequenz

$$0 \to Kern(F) \to Kern(G \circ F) \to Kern(G) \to Kokern(F) \to Kokern(G \circ F) \to Kokern(G) \to 0\,.$$

Satz. *Der Index $\chi(F)$ ist stetig in F.*

Beweis. Seien X, Y Banachräume und stetige Abbildungen $i : V \subset Y$, $p : X \twoheadrightarrow W$ für endlich dimensionale Räume V, W. Betrachte Abbildungen

$$X \hookrightarrow X \oplus V \to Y \oplus W \twoheadrightarrow Y$$

[12] anderenfalls gilt $F(\xi_n) \to 0$ für eine Teilfolge der Folge $\xi_n = x_n/\|x_n\|$. Wegen der Kompakheit von k konvergiert $k(\xi_n) \to \xi$ (für eine Teilfolge). Aus $\xi_n + k(\xi_n) \to 0$ folgt dann $\xi_n \to -\xi$ und damit $F(\xi) = -\xi + \xi = 0$. Wegen $\xi = \lim_n \xi_n \in A^c$ folgt $\xi = 0$ im Widerspruch zu $\|\xi\| = 1$.

definiert durch $X \ni x \mapsto (x,0)$, $(x,v) \mapsto (F(x)+i(v),p(x))$ und $(y,w) \mapsto y$ für ein $F \in L(X,Y)$. Die Komposition ist $x \mapsto F(x)$. Die erste und die letzte Abbildung ist Fredholm vom Index $-\dim(V)$ resp. $\dim(W)$. Ist die mittlere Abbildung f bijektiv, so ist f Fredholm vom Index Null. Dann ist der Index der Komposition $\chi(F)$ die Summe der Indices, also $\dim(W)-\dim(V)$. Beispiel: Sei $F: X \to Y$ Fredholm und $i(V)$ ein Komplement von $Bild(F)$ und $p: X = Kern(F) \oplus Kern(F)^c \to W = Kern(F)$. Dann ist die mittlere Abbildung f ein Isomorphismus. Fixiert man V, W, i, p und variert F stetig, variert die mittlere Abbildung stetig. Zum Beweis des Satzes genügt daher

Lemma. *Ist Z ein Banachraum und $f \in L(Z,Z)$ invertierbar, dann ist $f-h$ invertierbar für alle $h \in L(Z,Z)$ mit $\|h\| < \|f^{-1}\|^{-1}$.*

Beweis. $(f-h) = f^{-1} \circ (id - f^{-1}h)$ und $f-h$ ist invertierbar, falls $id - f^{-1}h$ invertierbar ist. Es gilt (geometrische Reihe)

$$(id - f^{-1}h)^{-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (f^{-1}h)^n$$

in dem vollständigen Raum $L(Z,Z)$, falls $\|f^{-1}h\| \leq \|f^{-1}\|\|h\| < 1$. QED

Fredholm Alternative. *Sei X ein Banachraum und $F \in L(X,X)$ ein Fredholm Operator vom Index $\chi(F)=0$. Dann sind äquivalent*

(1) *F ist injektiv.*
(2) *F ist surjektiv.*
(3) *F ist (stetig) invertierbar.*

Beweis. Trivial. Ist F invertierbar, gilt automatisch $F^{-1} \in L(X,X)$ wegen dem Satz von der offenen Abbildung. QED

Jeder Fredholm Operator F der Gestalt $F = id + k$ für kompaktes k hat Index $\chi(F)=0$, denn $F = id + t \cdot k$ ist eine stetige Familie von Fredholm Operatoren und $\chi(id)=0$.

Eigenwerte und Spektrum

Wie im Fall endlich dimensionaler Vektorräume ist Eigenwerttheorie am einfachsten im Falle von komplexen Vektorräumen. Das gilt ebenso für Banachräume.

Definition. Ein **komplexer normierter Raum** ist ein komplexer Vektorraum, dessen zugrunde liegender reeller Vektorraum eine Norm $\|.\|$ besitzt mit $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Ein solcher komplexer Vektorraum heisst vollständig (oder **komplexer Banachraum**), wenn der zugrunde liegende reelle Vektorraum vollständig ist.

Alle bisherigen Sätze lassen sich ohne Mühe auf den Fall von komplexen normierten Vektorräumen übertragen. Es gibt eine notwenige, aber sicherlich nicht überraschende Modifikation: Der Begriff des Prä-Hilbertraumes resp. Hilbertraumes ist dahingehend zu modifizieren, daß man eine **positiv definite hermitesche** Form $\langle .,. \rangle$ zugrunde legt anstatt einer positiv definiten symmetrischen $\mathbb{R}$-Bilinearform. Damit übertragen sich auch die Aussagen über Hilberträume. Eine Besonderheit in diesem Zusammenhang ist der Begriff der adjungierten Abbildung, welche wir weiter unten erläutern.

Definition. *Sei von nun an X ein komplexer Banachraum und alle Morphismen $\mathbb{C}$-linear. Für einen* **Endomorphismus** *$f \in L(X,X)$ eines Banachraumes X ist das* **Spektrum**

$$S(f) \subset \mathbb{C}$$

die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ für die $\lambda \cdot id_X - f$ nicht invertierbar ist.

Wie im letzten Abschnitt zeigt man mit Hilfe der geometrischen Reihe: Das Komplement $\mathbb{C} \setminus S(f)$ ist eine offene (!) Menge und $S(f) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|f\|\}$. Das Spektrum ist daher kompakt.

Eigenräume. Sei f ein kompakter Operator und $\lambda \neq 0$. Dann ist $\lambda \cdot id_X - f$ ein Fredholm Operator wegen $\lambda \cdot id_X - f = \lambda \cdot (id_X - \lambda^{-1} f)$, da $\lambda^{-1} f$ ein kompakter Operator ist. Insbesondere folgt $\dim(Kern(\lambda \cdot id_X - f)) < \infty$. Für $\lambda \neq 0$ liefert die Fredholm Alternative: $\lambda \in S(f) \Longleftrightarrow Kern(\lambda \cdot id_X - f) \neq 0$, und dies gilt genau dann wenn der **Eigenraum**

$$X_\lambda \;=\; \{x \in X \mid f(x) = \lambda \cdot x\}$$

von Null verschieden ist. Im Fall $\dim(X) = \infty$ gilt dagegen für einen kompakten Operator $f \in K(X,X)$ immer $0 \in S(f)$, wie man leicht sieht.

Korollar. *Jeder Eigenraum eines kompakten Operators zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist endlich dimensional.*

Selbstadjungierte Abbildungen

Ist $(X, \langle .,. \rangle)$ ein (komplexer) Hilbertraum, dann gibt es für jedes $f \in L(X,X)$ eine eindeutig bestimmte Abbildung $f^\dagger \in L(X,X)$ mit der Eigenschaft

$$\langle f^\dagger(x), y \rangle \;=\; \langle x, f(y) \rangle \quad , \quad \forall\, x, y \in V \;.$$

Man nennt $f^\dagger$ die zu f **adjungierte** Abbildung. Wie im Fall der transponierten Abbildung zeigt man $\|f^\dagger\| = \|f\|$. Es gilt jetzt aber $(f^\dagger)^\dagger = f$ und $(\lambda f + \mu g)^\dagger = \overline{\lambda} \cdot f^\dagger + \overline{\mu} \cdot g^\dagger$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Gilt $f = f^\dagger$, heisst der Operator $f \in L(X,X)$ **selbstadjungiert**. *Für selbstadjungierte f ist $\langle f(x), x \rangle$ eine reelle Zahl. Eigenwerte von selbstadjungierten Operatoren sind reell, d.h. der Eigenraum $X_\lambda = 0$ für $\lambda \notin \mathbb{R}$.*

Lemma. *Ist $f \in L(X,X)$ selbstadjungiert, gilt $S(f) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Für $F := f - \lambda \cdot id$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $X_\lambda = Kern(F) = 0$ und $Bild(F)$ liegt dicht in X wegen $Bild(F)^\perp = Kern(f - \overline{\lambda} \cdot id) = 0$ [denn $0 = \langle \xi, f(x) - \lambda \cdot x \rangle = \langle f(\xi) - \overline{\lambda} \cdot \xi, x \rangle$, $\forall x \Rightarrow f(\xi) - \overline{\lambda} \cdot \xi = 0$]. Für $f(x_n) - \lambda x_n \to y \in X$ ist x_n eine CF, also $y = F(x)$ für $x = \lim_n x_n$. [Sei $a_n = x_m - x_n$ und $m = m(n) > n$, dann gilt $f(a_n) - \lambda \cdot a_n \to 0$. Wegen $\langle f(a_n), \frac{a_n}{\|a_n\|} \rangle \in \mathbb{R}$ folgt $Im(\lambda) \cdot \|a_n\| \to 0$] D.h. F ist surjektiv und damit bijektiv. QED

Lemma. *Für selbstadjungierte stetige Endomorphismen f eines Hilbertraumes gilt*

$$\boxed{\sup_{\|x\|=1} |\langle f(x), x\rangle| = \|f\|} \ .$$

Beweis. Beachte $m := \sup_{\|x\|=1} |\langle f(x), x\rangle| \leq \|f\|$. Andererseits gilt $4\|f\| \leq 4m$ wegen

$4Re\langle f(x), y\rangle = \langle f(x{+}y), x{+}y\rangle^2 - \langle f(x{-}y), x{-}y\rangle^2 \leq m(\|x{+}y\|^2 + \|x{-}y\|^2) = 2m(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ und $\|f\| = sup_{\|x\|=1}\|f(x)\| = sup_{\|x\|=\|y\|=1}|\langle f(x), y\rangle|$. Ersetzt man y durch $exp(it)\cdot y$ kann man nämlich oBdA annehmen $Re\langle f(x), y\rangle = \langle f(x), y\rangle$. Es folgt $\|f\| = m$. QED

Spektralsatz

Lemma. *Ist X ein Hilbertraum und $f \in L(X, X)$ ein kompakter und selbstadjungierter Operator, dann existiert ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\|f\|$ oder $-\|f\|$.*

Beweis. Das letzte Lemma zeigt die Existenz einer Folge x_n mit $\|x_n\| = 1$ und

$$\lim_n |\langle f(x_n), x_n\rangle| \ = \ \|f\| \ .$$

Beachte $\langle f(x_n), x_n\rangle \in \mathbb{R}$. Also oBdA $\lim\langle f(x_n), x_n\rangle = m$ für $m = \pm\|f\|$. f ist kompakt, also konvergiert oBdA die Folge $f(x_n)$. Schliesslich gilt $|\langle f(x_n), x_n\rangle| \leq \|f(x_n)\|\|x_n\| \leq \|f\|$. Aus $|\langle f(x_n), x_n\rangle| \to \|f\|$ folgt daher $\|f(x_n)\| \to \|f\|$. Zusammen ergibt dies

$$\|f(x_n) - m\cdot x_n\| = \|f(x_n)\|^2 + \|m\cdot x_n\|^2 - 2m\langle f(x_n), x_n\rangle \ \longrightarrow \ m^2 + m^2 - 2m\cdot m = 0 \ .$$

Da $f(x_n)$ konvergiert, konvergiert dann auch $m\cdot x_n$. Ist $f \neq 0$, dann ist $m \neq 0$ und es folgt $x_n \to x \in X$ mit $f(x) = m\cdot x$. Wegen $\|x\| = 1$ ist x ein Eigenvektor. QED

Satz. *Sei X ein unendlich dimensionaler Hilbertraum und $f \in L(X, X)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Dann besitzt X eine Hilbertraum-Basis bestehend aus Eigenvektoren von f. Für $\lambda \neq 0$ sind die Eigenräume X_λ von f endlich dimensional und genau dann von Null verschieden, wenn gilt $\lambda \in S(f)$. Das Spektrum $S(f)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des Intervalls $[-\|f\|, \|f\|]$ mit dem Nullpunkt als einzig möglichem Häufungspunkt.*

Beweis. Das Orthokomplement $Y \subseteq X$ aller Eigenräume von f ist ein Hilbertraum. Da f selbstadjungiert ist, zeigt man leicht $f : Y \to Y$. Da offensichtlich die Einschränkung von f auf Y wieder kompakt ist und f auf Y keine Eigenvektoren mehr besitzt, folgt aus dem letzten Lemma $Y = 0$.

Angenommen $0 \neq \lambda \in S(f)$ wäre ein Häufungspunkt von $S(f)$. Dann existiert eine Folge $S(f) \ni \lambda_n \to \lambda \in S(f)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_n \neq 0$ in (f). Wähle Eigenvektoren $x_n \in X_{\lambda_n}$ mit $\|x_n\| = 1$. Da k kompakt ist, konvergiert oBdA die Folge $f(x_n) \to y$. Aus $y = \lim_n \lambda_n x_n$ und $\lim_n \lambda_n = \lambda \neq 0$ folgt dann die Konvergenz $x_n \to x$. Einerseits gilt $\|x\| = \lim_n \|x_n\| = 1$. Anderseits impliziert $\langle x_n, x_{n+1}\rangle = 0$ dann $\|x\|^2 = \lim_n\langle x_n, x_{n+1}\rangle = 0$. Ein Widerspruch. QED

Bemerkung. Im letzten Beweis wurde benutzt, daß für selbstadjungierte Operatoren f auf einem Hilbertraum X gilt

$$\boxed{\lambda \neq \mu \implies \langle X_\mu, X_\lambda \rangle = 0}\ .$$

[In der Tat für $x_\mu \in X_\mu$ und $x_\lambda \in X_\lambda$ gilt $\mu\langle x_\mu, x_\lambda\rangle = \langle f(x_\mu), x_\lambda\rangle = \langle x_\mu, f(x_\lambda)\rangle = \lambda\langle x_\mu, x_\lambda\rangle$. Also $(\mu - \lambda)\langle x_\mu, x_\lambda\rangle = 0$].

Fourier Theorem

Sei $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$ der n-dimensionale Torus für $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Der Raum $\mathbb{T}^n$ ist kompakt. Für das Maß $(2\pi)^{-n}dx$ gilt $vol(\mathbb{T}^n) = 1$. Die Funktionen $e_m(x) = exp(im \cdot x) \in L^2(\mathbb{T}^n)$ für $m \in \mathbb{Z}^n$ bilden eine Orthonormalsystem von $L^2(\mathbb{T}^n)$: Die **Fourierkoeffizienten** $\hat{f}(m)$ von $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$

$$\hat{f}(m) \ = \ (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) exp(-im \cdot x) dx$$

sind für alle $m \in \mathbb{Z}^n$ wohldefiniert. Sei $L^2(\mathbb{Z}^n)$ der Hilbertraum aller komplexen Folgen $a : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |a(m)|^2 < \infty$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle a, b\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a(m)\overline{b(m)} \ .$$

Im folgenden schreiben wir oft $C^k(X)$ für $C^k(X, \mathbb{C})$ und $L^2(X)$ anstatt $L^2(X, \mathbb{C})$ etc.

Fourier Theorem. *Die Fourier Transformation $f \mapsto \hat{f}$ definiert einen <u>isometrischen</u> Isomorphismus von Hilberträumen*

$$\boxed{L^2(\mathbb{T}^n) \cong L^2(\mathbb{Z}^n)}$$

mit der **Plancherelformel** für alle $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n)$

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{g(x)}dx \ = \ \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m)\overline{\hat{g}(m)} \ .$$

Beweis. Zu zeigen ist, daß die $e_m(x)$ eine Hilbertraum-Basis von $L^2(\mathbb{T}^n)$ definieren. Da $\mathbb{T}^n$ kompakt ist, liegt $C(\mathbb{T}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{T}^n)$. Wegen $\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq vol(\mathbb{T}^n)^{1/2}\|f\|_{C(\mathbb{T}^n)}$ für $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ genügt es daher zu zeigen, dass der Aufspann V der Funktionen $e_m(x)$ dicht in $C(\mathbb{T}^n)$ liegt. Letzteres folgt aus dem Satz von **Stone-Weierstraß** wegen $e_m(x)e_{m'}(x) = e_{m+m'}(x)$ und $\overline{e_m(x)} = e_{-m}(x)$, da die $e_m(x), m \in \mathbb{Z}^n$ Punkte in $\mathbb{T}^n$ trennen. QED

Die Räume $L^2_s(\mathbb{Z}^n)$

Für eine natürliche Zahl n und eine reelle Zahl s sei $L^2_s(\mathbb{Z}^n)$ der Raum aller komplexen Folgen $b : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ mit $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}(1 + m \cdot m)^s\|b(m)\|^2 < \infty$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle b_1, b_2\rangle_{L^2_s(\mathbb{Z}^n)} \ = \ \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} (1 + m \cdot m)^s b_1(m)\overline{b_2(m)} \ .$$

$L^2_s(\mathbb{Z}^n)$ ist als Hilbertraum isometrisch isomorph zu $L^2(\mathbb{Z}^n)$ vermöge

$$\rho_s : \ L^2_s(\mathbb{Z}^n) \ni b(m) \ \mapsto \ a(m) = b(m)(1 + m^2)^{s/2} \in L^2(\mathbb{Z}^n) \ .$$

Die natürliche Paarung $L^2_s(\mathbb{Z}^n) \times L^2_{-s}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\langle b, c\rangle_s = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} b(m)\overline{c(m)}$ induziert einen Isomorphismus

$$L^2_s(\mathbb{Z}^n)^* \ \cong \ L^2_{-s}(\mathbb{Z}^n) \ ,$$

was leicht mit Hilfe des kommutativen Diagrams

$$\begin{array}{ccc} L^2_s(\mathbb{Z}^n) \times L^2_{-s}(\mathbb{Z}^n) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle \rho_s \times \rho_{-s}} \big\downarrow \cong & & \big\| \\ L^2(\mathbb{Z}^n) \times L^2(\mathbb{Z}^n) & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

auf den Fall $s = 0$ zurückgeführt werden kann.

Die Komplettierungen $H^s(\mathbb{T}^n)$

Bemerkung. Für jede natürliche Zahl k gilt

$$f \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \Longrightarrow (1+\Delta)^k f \in C^\infty(T^n) \subset L^2(\mathbb{T}^n)$$

für den Euklidschen **Laplace Operator**

$$\Delta \;=\; -\sum_{\nu=1}^{n} \partial_\nu^2 \ .$$

Aus $\widehat{\partial_\nu f}(m) = im_\nu \cdot \hat{f}(m)$ für $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ folgt $(\widehat{(1+\Delta)^k\varphi})(m) = (1+m^2)^k \cdot \hat{\varphi}(m)$. Für alle k gilt daher $(1+m^2)^k \hat{f}(m) \in L^2(\mathbb{Z}^n)$ und damit

$$\forall\ f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)\ ,\ \forall\ k\ \ \exists\ C_k(f): \qquad |\hat{f}(m)| \leq \frac{C_k(f)}{(1+m^2)^k}\ .$$

Die Fourierkoeffizienten einer Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ klingen daher rasch ab. Mit Hilfe der Fourier Transformation $f(x) \mapsto \hat{f}(m)$ können wir somit $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ als Teilraum von $L^2_s(\mathbb{T}^n)$ auffassen

$$i_s : C^\infty(\mathbb{T}^n) \ \hookrightarrow\ L^2_s(\mathbb{Z}^n) \quad , \quad i_s(f) = \hat{f}\ .$$

Da die Basisfunktionen $e_m(x)$ in $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ liegen, enthält das Bild von $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ den dichten Unterraum von $L^2_s(\mathbb{Z}^n)$ aller Folgen mit endlichem Träger. Es folgt

Definition. *Die Komplettierung $H^s(\mathbb{T}^n)$ des Prä-Hilbertraumes $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle_{H^s(\mathbb{T}^n)} \;=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} (1+m\cdot m)^s \hat{f}(m)\overline{\hat{g}(m)}$$

ist isomorph zu $L^2_s(\mathbb{Z}^n)$. Die Abbildung $i_s : (x) \mapsto \hat{f}(m)$ setzt sich daher von $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ aus fort zu einem isometrischen Isomorphismus

$$i_s : H^s(\mathbb{T}^n) \;\cong\; L^2_s(\mathbb{Z}^n)\ .$$

Lemma. *Man erhält ein kommutatives Diagram mit einem vertikalen Homöomorphismus auf der rechten Seite*

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathbb{T}^n) \arrow[r, hook] \arrow[d, "1+\Delta"'] & H^{s+2}(\mathbb{T}^n) \arrow[r, "i_{s+2}", "\sim"'] \arrow[d, dashed, "\cong"', "1+\Delta"] & L^2_{s+2}(\mathbb{Z}^n) \arrow[d, "\cong"', "1+m^2"] \\ C^\infty(\mathbb{T}^n) \arrow[r, hook] & H^s(\mathbb{T}^n) \arrow[r, "i_s", "\sim"'] & L^2_s(\mathbb{Z}^n) \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Abbildung $b(m) \mapsto (1+m^2)^{(s_1-s_2)/2} b(m)$ induziert Isometrien $L^2_{s_1}(\mathbb{Z}^n) \cong L^2_{s_2}(\mathbb{Z}^n)$. Dies definiert den rechten vertikalen Isomorphismus und induziert einen Isomorphismus in der Mitte. Dieser wird der Einfachheit halber mit $1+\Delta$ bezeichnet, denn er stimmt auf dem Teilraum $C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset H^s(\mathbb{T}^n)$ mit diesem Differentialoperator überein. QED

Die Paarung I_s

Zwar ist jeder der Hilberträume $H^s(\mathbb{T}^n)$ selbstdual, aber man hat zusätzlich eine natürliche Paarung

$$I_s : H^s(\mathbb{T}^n) \times H^{-s}(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$$

definiert für $f \in H^s(\mathbb{T}^n), g \in H^{-s}(\mathbb{T}^n)$ durch $I_s(f,g) := \sum_m i_s(f)(m)\overline{(i_{-s}g)(m)}$. Mit I_s kann man oft einfacher Rechnen als mit dem Skalarprodukt der Hilberträume $H^s(\mathbb{T}^n)$. Wegen der Plancherel Formel gilt nämlich auf den Teilräumen $C^\infty(\mathbb{T}^n)$

$$\boxed{I_s(f,g) \ = \ (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{g}(x)dx} \quad , \quad f,g \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \ .$$

Für $s > \frac{n}{2}$ gilt diese Formel auch für alle $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ und alle $g \in H^s(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^n)$. Dies folgt durch stetige Fortsetzung, da $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dicht in $H^s(\mathbb{T}^n)$ liegt.

Lemma. *Für alle $f \in H^{-s+2\ell}(\mathbb{T}^n)$ und $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ oder allgemeiner $\varphi \in H^s(\mathbb{T}^n)$ gilt*

$$\boxed{I_s(\varphi, (1+\Delta)^\ell f) = I_{s-2\ell}((1+\Delta)^\ell \varphi, f)} \ .$$

Beweis. Durch Übergang zu $L^2_{-s+2\ell}(\mathbb{Z}^n)$ und $L^2_s(\mathbb{Z}^n)$ wird dies unmittelbar evident. QED

Lemma. *Die Paarung I_s induziert Isomorphismen*

$$\boxed{\mu_s : H^{-s}(\mathbb{T}^n) \cong H^s(\mathbb{T}^n)^*} \quad , \quad \mu_s(\psi) = I_s(.,\psi) \ .$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der entsprechenden Aussage $L^2_s(\mathbb{Z}^n)^* \cong L^2_{-s}(\mathbb{Z}^n)$ und der Isomorphie $H^s(\mathbb{T}^n) \cong L^2_s(\mathbb{T}^n)$. QED

Sobolevräume

Notation. Für $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ definieren wir $|\partial^i\varphi|$ durch $|\partial^i\varphi|^2 := \sum_{j_1=1}^n \cdot \sum_{j_i=1}^n |\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_i}\varphi|^2$. Für $f,g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ und $k \in \mathbb{N}$ definiert man die **Sobolevnormen** $\|f\|^2_{W^k(\mathbb{T}^n)}$ mit Hilfe des Skalarproduktes

$$\langle f,g\rangle_{W^k(\mathbb{T}^n)} \; = \; \sum_{i=0}^k \langle \partial^i f, \partial^i g\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} \; .$$

Dieses Skalarprodukt macht $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ zu einen Prä-Hilbertraum mit der Norm $\|f\|_{W^k(\mathbb{T}^n)}$ definiert durch $\|f\|^2_{W^k(\mathbb{T}^n)} = \sum_{i=0}^k (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n}|\partial^i\varphi|^2 dx$. Die Vervollständigung als Hilbertraum ist der sogenannte **Sobolevraum** $W^k(\mathbb{T}^n)$.

Lemma. *Für $k \in \mathbb{N}$ ist auf $C^k(\mathbb{T}^n)$ die Norm $\|f\|_{H^k(\mathbb{T}^n)}$ äquivalent zur Sobolevnorm $\|f\|_{W^k(\mathbb{T}^n)}$ und zur Norm*

$$\|f\| \; = \; \sum_{i=0}^k \|\partial^i f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \; .$$

Beweis. $\sum_{i=0}^k \|\partial^i f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}$ ist offensichtlich äquivalent zu der Norm $\|f\|_{W^k(\mathbb{T}^n)}$. Die Abschätzung $\|f\|^2_{H^k(\mathbb{T}^n)} \le \max_i \binom{k}{i} \cdot \|f\|^2_{W^k(\mathbb{T}^n)}$ folgt leicht aus der Plancherel Formel und $(1+m^2)^k \le \max_i \binom{k}{i} \cdot \sum_{i=0}^k m^{2i}$ in Termen der Fourier Transformierten $\hat{f}$. Partielle Integration gibt für $\|f\|^2_{W^k(\mathbb{T}^n)}$ die Formel $\sum_{i=0}^k \cdots \sum_{j_1=1}^n \cdot \sum_{j_i=1}^n \langle \partial^2_{i_1}\cdots\partial^2_{i_k} f, f\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)}$. Es folgt $\|f\|^2_{W^k(\mathbb{T}^n)} \le \|f\|^2_{H^k(\mathbb{T}^n)}$ erneut mit Hilfe der Fourier Transformation, welche die Aussage auf $\sum_{i=0}^k (m_1^2 + \cdots m_n^2)^i \le (1+\sum_i m_i^2)^k$ reduziert. QED

Aus $(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n}|\partial^i\varphi(x)|^2 dx \le \max_{x\in K}|\partial^i\varphi(x)|^2$ folgt

$$\|\varphi\|_{H^k(\mathbb{T}^n)} \;\le\; \max_i \binom{k}{i} \cdot \|\varphi\|_{W^k(\mathbb{T}^n)} \;\le\; const. \cdot \|\varphi\|_{C^k(\mathbb{T}^n)}$$

auf $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Hierbei sei die Norm auf $C^k(\mathbb{T}^n)$ gleich $\|f\|_{C^k(\mathbb{T}^n)} = \sum_{i=0}^k sup_{x\in\mathbb{T}^n}(|\partial^i f(x)|)$.

Für alle natürlichen Zahlen k setzt sich daher die Abbildung i_s von $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ fort zu stetigen injektiven $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen

$$\boxed{(C^k(\mathbb{T}^n), \|.\|_{C^k(\mathbb{T}^n)}) \hookrightarrow H^k(\mathbb{T}^n)} \quad (\ell = 0,1,2,...) \; .$$

Offensichtlich hat man für $s_1 \ge s_2$ eine stetige Inklusion $H^{s_1}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow H^{s_2}(\mathbb{T}^n)$, welche auf $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ die identische Abbildung induziert.

Sobolev Theorem

Einbettungssatz von Sobolev. *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $\ell > k + \frac{n}{2}$ in $\mathbb{R}$ gibt es eine stetige lineare Einbettung*

$$\boxed{H^\ell(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow C^k(\mathbb{T}^n), \|.\|_{C^k(\mathbb{T}^n)})}\ ,$$

welche auf $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ die identische Abbildung ist.

Beweis. $c(n,\varepsilon) := \sum_m (1+m^2)^{-n/2-\varepsilon} \leq const. + vol(S^{n-1}) \int_{r\geq 1} r^{-n/2-\varepsilon} r^{n-1} dr < \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$ und die Schwarzsche Ungleichung zeigen

$$\Big(\sum_m |\hat{f}(m)|(1+m^2)^{\frac{k}{2}}\Big)^2 \ \leq\ c(n,\varepsilon) \cdot \sum_m |\hat{f}(m)|^2 (1+m^2)^{k+\frac{n}{2}+\varepsilon} \ =\ c(n,\varepsilon) \cdot \|f\|^2_{H^{k+\frac{n}{2}+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)}$$

für alle $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Also genügt $\|f\|_{C^k(\mathbb{T}^n)} \leq c \cdot \sum_m |\hat{f}(m)|(1+m^2)^{\frac{k}{2}}$. Ähnlich wie im Beweis des letzten Lemmas reduziert man dies leicht auf den Fall $k = 0$. Für $k = 0$ zeigt $\sum_m |\hat{f}(m)| < \infty$ für alle $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dann: $f(x) = \sum_m \hat{f}(m) exp(im \cdot x)$ ist ein absolut und gleichmässig konvergenter Limes der stetigen Funktionen $\hat{f}(m)exp(im \cdot x)$ auf dem Kompaktum $\mathbb{T}^n$, also eine stetige Funktion auf $\mathbb{T}^n$ mit $\|f\|_{C^0(\mathbb{T}^n)} = sup_{x\in\mathbb{T}^n}(|f(x)|) \leq \sum_m |\hat{f}(m)| \leq c(n,\varepsilon)^{1/2} \cdot \|f\|_{H^{n/2+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)}$. Damit ist für alle k und $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ die Ungleichung $\|f\|_{C^k(\mathbb{T}^n)} \leq c(n,\varepsilon)^{1/2} \cdot \|f\|_{H^{n/2+\varepsilon}(\mathbb{T}^n)}$ gezeigt. Die identische Abbildung von $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ setzt sich daher zu einer stetigen linearen Abbildung $H^{k+\frac{n}{2}+\varepsilon}(\mathbb{T}^n) \to C^k(\mathbb{T}^n)$ der Komplettierungen fort. Für Elemente b im Kern dieser Abbildung ist $f(x) = \sum_m b(m)e_m(x) = 0$ und daher $b(m) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)e_{-m}(x)dx = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}^n$, d.h. $b = 0$. QED

Zusammenfassung. Ist ℓ eine natürliche Zahl $\ell > k + \frac{n}{2}$, dann hat man stetige Inklusionen

$$\boxed{C^\ell(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow H^\ell(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow C^k(\mathbb{T}^n)}\ ,$$

deren Zusammensetzung die natürliche Inklusion $C^\ell(\mathbb{T}^n) \subseteq C^k(\mathbb{T}^n)$ ist.

Satz von Rellich. *Für $s_2 > s_1$ in $\mathbb{R}$ ist die von der Identität auf $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ induzierte Abbildung $i : H^{s_2}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{T}^n)$ ein kompakter Operator*

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(\mathbb{T}^n) \arrow[r, equal] \arrow[d, hook, "i_{s_2}"'] & C^\infty(\mathbb{T}^n) \arrow[d, hook, "i_{s_1}"] \\
H^{s_2}(\mathbb{T}^n) \arrow[r, hook, "i"] & H^{s_1}(\mathbb{T}^n)
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $E^{s_2} = E^{s_2}_{\leq 1}$ die Einheitskugel in $H^{s_2}(\mathbb{T}^n)$. Zu zeigen ist: Der Abschluss K des Bildes von $i(E^{s_2})$ in $H^{s_1}(\mathbb{T}^n)$ ist kompakt. K ist abgeschlossen, also ein vollständiger metrischer Raum. Es genügt daher die Präkompaktheit von K zu zeigen, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ die Existenz einer endlichen Überdeckung von K durch offene Kugeln vom Radius

ε in $H^{s_1}(\mathbb{T}^n)$. Wähle dazu ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N^{s_1-s_2} < \varepsilon/2$. Zur Vereinfachung der Notation sei $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^1$.

Der Teilraum $\{f \in H^{s_2}(\mathbb{T}^1) \mid \hat{f}(-N) = \cdots = \hat{f}(N) = 0\}$ hat endliche Kodimension in $H^{s_2}(\mathbb{T}^1)$. Sein Schnitt mit E^{s_2} sei A_N. Das Orthokomplement $(A_N)^\perp$ ist ein Vektorraum der Dimension $\leq 2N+1$. Nach Wahl von N folgt aus der Definition (!) der Sobolevnormen

$$i(E^{s_2}_{\leq 1} \cap A_N) \ \subseteq\ E^{s_1}_{\leq N^{s_1-s_2}} \cap i(A_N) \ \subseteq\ E^{s_1}_{\varepsilon/2}\ .$$

Andererseits gilt $E^{s_2} \subseteq (E^{s_2} \cap A_N) \times E^{s_2} \cap (A_N)^\perp$. Das Bild von $E^{s_2} \cap A_N$ ist enthalten in $E^{s_1}_{\varepsilon/2}$. Aber $E^{s_2} \cap (A_N)^\perp$ ist kompakt wegen $\dim(A_N)^\perp < \infty$ ebenso wie sein Bild in $H^{s_1}(T^1)$. Das Bild lässt sich daher durch endlich viele offene Kugeln vom Radius $<$ $\varepsilon/2$ mit gewissen Mittelpunkten x_ν überdecken. Also wird das Bild von E^{s_2} durch die enstsprechenden offenen Kugeln vom Radius ε mit den Mittelpunkten $0 \times x_\nu$ überdeckt (Dreiecksungleichung). QED

Verallgemeinerte Funktionen

Für eine C^∞-Mannigfaltigkeit M nennt man $C_c^\infty(M)$ den Raum der **Testfunktionen**. Eine verallgemeinerte Funktion F auf M ist per Definition eine $\mathbb{R}$-Linearform

$$F: \ C_c^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Garbeneigenschaft. *Die verallgemeinerten Funktionen $\mathcal{F}(M)$ auf M definieren eine* **Garbe**. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ gilt in kanonischer Weise $C_c^\infty(U) \subseteq C_c^\infty(M)$. Dies definiert eine Einschränkung $res_u^M : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(U)$. Sei $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung von M. Dann folgt $F = 0$ aus $res_{U_i}^M(F) = 0$ gilt für alle $i \in I$. [Benutze C^∞-Partition der Eins zu dieser Überdeckung.] Weiterhin: Für verallgemeinerte Funtionen F_U auf U gilt

$$res_{U\cap V}^U(F_U) = res_{U\cap V}^V(F_V) \ \ \forall\, U,V \in I \Longrightarrow \ \ \exists\, F \in \mathcal{F}(M) \ \ res_U^M(F) = F_U \ .$$

Beweis: Setze $F(\varphi) := \sum_{i=1}^\infty F_{U_i}(\varphi \cdot \varphi_i)$ für eine C^∞-Partition der Eins $\sum_i \varphi_i = 1$ mit $supp(\varphi_i) \subset U_i \in I$. Offensichtlich ist F eine verallgemeinerte Funktion auf M mit $res_U^M(F) = F_U$. Dies zeigt die Garbenaxiome. QED

Man kann verallgemeinerte Funktionen daher lokal studieren und dabei annehmen M sei eine geeignete offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Der **Träger** $supp(F)$ einer verallgemeinerten Funktion ist definiert als Komplement der offenen Menge aller Punkte $x \in M$, für die es eine offene Umgebung $U \subseteq M$ gibt mit der Eigenschaft $F(\varphi) = 0, \forall\, \varphi \in C_c^\infty(U)$. Sei U das Komplement von $supp(F)$, dann gilt $F(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Der Träger $supp(F)$ einer verallgemeinerten Funktion F ist per Definition abgeschlossen.

Ableitungen. *Ist M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ oder des Torus $\mathbb{T}^n$*, kann man die Ableitung einer verallgemeinerten Funktion $F \in \mathcal{F}(M)$ definieren durch

$$\boxed{\partial_i F(\varphi) \ = \ -F(\partial_i \varphi)} \ .$$

Das Vorzeichen wird verständlich, wenn man berücksichtigt, dass man stetige Funktionen $f \in C(M)$ – oder sogar allgemeiner Funktionen in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, welche lokal auf Kompakta K in $L^1(K)$ liegen bezüglich des standard Lebesgue Masses von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{T}^n$ – als verallgemeinerte Funktionen $F_{f\cdot dx} \in \mathcal{F}(M)$ auffassen kann vermöge

$$\boxed{F_{f\cdot dx}(\varphi) \ = \ \int_M \varphi(x) f(x) dx} \quad , \quad f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Verallgemeinerte Funktionen F auf M von dieser Gestalt $F = F_{f\cdot dx}$ nennt man **glatt** im Falle $f \in C^\infty(M)$. Durch partielle Integration sieht man für glatte $F = F_{f\cdot dx}$

$$\partial_i F_{f\cdot dx} \ = \ F_{(\partial_i f)\cdot dx} \ .$$

Sei $F \in \mathcal{F}(M)$ und $f, g \in C^\infty(M)$. Dann ist $f \cdot F(\varphi) := F(f \cdot \varphi)$ in $\mathcal{F}(M)$, und es gilt $f \cdot F_{g\cdot dx} = F_{(fg)\cdot dx}$. Dies macht $\mathcal{F}(M)$ zu einem $C^\infty(M)$-Modul.

Direktes Bild. Eine stetige Abbildung $g : M \to N$ zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten heisst **eigentlich**, wenn das Urbild kompakter Menge kompakt ist. Ist I ein Radon Integral auf M

und ist g eigentlich, dann ist $F = g_*(I)$ definiert durch $g_*I(\varphi) = I(g^*(\varphi))$ eine verallgemeinerte Funktion auf N. Für eine eigentliche C^∞-Abbildung g gilt $g^*(\varphi) = \varphi(g(x)) \in C_c^\infty(M)$ für $\varphi(y) \in C_c^\infty(N)$. Jede verallgemeinerte Funktion F auf M definiert daher eine verallgemeinerte Funktion g_*F auf N durch $g_*F(\varphi) = F(g^*(\varphi))$. Für offene Teilmengen M und N Euklidscher Räume folgt dann aus der Kettenregel

$$g_*(\partial_i F) \ = \ \sum_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} \cdot \partial_j(g_*F) \ .$$

Homogenität. Sei $M = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $g_t : M \to M$ die Abbildung $g_t(x) = g(t^{-1}x)$. Man sagt F ist *homogen vom Grad* $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn $g_{t*}F = t^\alpha \cdot F$ gilt für alle $t > 0$ in $\mathbb{R}$. Beispiel: Ist F homogen vom Grad α, dann ist $\partial_i F$ homogen vom Grad $\alpha - 1$. Die Distribution $F_{r^\alpha \cdot dx}$ ist homogen vom Grad $n + \alpha$.

Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{T}^n$

Sei M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{T}^n$. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $K \subseteq M$ kompakt. Zur Erinnerung: $C_K^k(M) \subseteq C^k(M)$ (k-mal stetig partiell differenzierbare Funktionen auf M mit Träger in K). Wir versehen $C_K^k(M)$ mit der Einschränkung der $C^k(M)$-Norm[13]

$$\boxed{\|\varphi\|_{C_K^k(M)} \ = \ \textstyle\sum_{i=0}^k sup_{x \in K}(|\partial^i \varphi(x)|)} \ .$$

Hierbei ist $|\nabla^i f|^2 = \sum_{j_1=1}^n \cdot \sum_{j_i=1}^n |\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_i} f|^2$.

Definition. *Eine* **Schwartz Nullfolge** φ_m *ist eine Folge von Funktionen* $\varphi_m \in C_c^\infty(M)$ *mit der Eigenschaft* $\varphi_m \in C_K^\infty(M)$ *für eine feste kompakte Teilmenge* $K \subseteq M$ *so dass für alle* $k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\|\varphi_m\|_{C_K^k(M)} \to 0 \quad , \quad (\forall \ k \in \mathbb{N}) \ .$$

Definition. *Eine verallgemeinerte Funktion* $F \in \mathcal{F}(M)$ *für* $M = \mathbb{R}^n$ *oder* $M = \mathbb{T}^n$ *nennt man eine* **Distribution**, *wenn folgendes gilt: Für jede Schwartz Nullfolge* $\varphi_m \in C_c^\infty(M)$ *gilt*

$$\boxed{\lim_m F(\varphi_m) \ = \ 0} \ .$$

Beispiel 1. Die verallgemeinerte Funktion δ_0 mit Träger $\{0\}$

$$\delta_0(\varphi) := \varphi(0) \quad , \quad \text{(Dirac Distribution)}$$

ist eine Distribution, denn $|\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{C_K^0(M)} \leq \|\varphi\|_{C_K^k(M)}$ für alle K und k, und δ_0 ist homogen vom Grad 0.

[13] Man kann zeigen, dass die Räume $C_K^k(M)$ vollständig sind. Durch den Hauptsatz führt man das auf den Fall $k = 0$ zurück (siehe Skript Analysis II).

Beispiel 2. Für $f \in L^1_{loc}(M)$ ist $F_{f\cdot dx}$ eine Distribution, denn

$$|F_{f\cdot dx}(\varphi)| \leq \int_{x\in K} |f(x)|dx \cdot \max_{x\in K} |\varphi(x)| \leq C \cdot \|\varphi\|_{C^0_K(M)} \leq C \cdot \|\varphi\|_{C^k_K(M)}$$

gilt für alle K, k mit der Konstante $C = \|f\|_{L^1(K)}$. Weiterhin definiert jedes Radon Integral auf $C_c(M)$ eine Distribution auf M. Allgemeiner: Sei $g : M \to N$ eine eigentliche stetige Abbildung und I ein Radon Integral auf $C_c(M)$, dann definiert $F = g_*(I)$ eine Distribution auf N.

Beispiel 3. Ist F eine Distribution, dann auch die Ableitung $\partial_i F$ für alle i. Dies folgt unmittelbar aus der Definition wegen $\| -\partial_i\varphi\|_{C^k_K(M)} \leq \|\varphi\|_{C^{k+1}_K(M)}$.

Beispiel 4. Ist F eine Distribution auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$, V offen in R^m und $g : U \to V$ eine eigentliche C^∞-Abbildung, dann ist g_*F eine Distribution auf V. [Beachte $\|\varphi(g(x))\|_{C^k_{g^{-1}(K)}}$ lässt sich mit Hilfe der Kettenregel durch $C \cdot \|\varphi(y)\|_{C^k_K}$ abschätzen. Somit bildet $\varphi^* : C^\infty_K(V) \to C^\infty_{g^{-1}(K)}(U)$ Schwartz Nullfolgen auf Schwartz Nullfolgen ab.]

Beispiel 5. Ist F eine Distribution und $f \in C^\infty(M)$, dann ist auch $f \cdot T$ eine Distribution. Ist nämlich $\varphi_n(x)$ eine Schwartz Nullfolge, dann auch $f(x)\varphi_n(x)$. Beachte $f \cdot T(\varphi) = T(f \cdot \varphi)$. Es folgt daher mit demselben Argument wie für verallgemeinerte Funktionen

Lemma. *Die Distributionen bilden eine C^∞_M-Moduluntergarbe $\mathcal{D}$ der C^∞_M-Modulgarbe $\mathcal{F}$ der verallgemeinerten Funktionen auf M.*

Eine Distribution F heißt von **endlicher Ordnung**, wenn sie die Ableitung $F = D(F_f)$ einer "stetigen" Distribution $F_f, f \in C(M)$ ist für einen Differentialoperator $D = \sum_{|i|\leq k} a_i\partial^i$ mit konstanten Koeffizienten a_i. Es folgt

Lemma. *Eine verallgemeinerte Funktion F, deren Einschränkung auf $C^\infty_K(M)$ von endlicher Ordnung ist für jedes Kompaktum $K \subseteq M$, ist eine Distribution.*

Hiervon gilt auch die Umkehrung: Ist F eine Distribution und K ein Kompaktum, dann ist F von endlicher Ordnung auf $C_K(M)$. [Wähle $f(x) \in C^\infty_c(M)$ mit $f|_K = 1$, dann ist ψF eine Distribution mit kompaktem Träger (Bemerkung 3) und stimmt auf $C^\infty_K(M)$ mit F überein. Aus dem Satz im nächsten Abschnitt folgt daher, daß die Einschränkung von F auf $C^\infty_K(M)$ von endlicher Ordnung ist.]

Eine Charakterisierung von Distributionen

Satz. *Eine verallgemeinerte Funktion F auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger K ist genau dann eine Distribution, wenn F von endlicher Ordnung ist.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß jede Distribution mit kompaktem Träger K von endlicher Ordnung ist. Wähle $K \subset U \subset K' \subset \mathbb{R}^n$ mit U offen und K' kompakt und eine Abschneidefunktion $\psi \in C^\infty_{K'}(M)$, welche identisch 1 ist auf K. Beachte $F = \psi \cdot F$. OBdA liegt K' durch Reskalieren im Inneren des Standardquaders $[-\pi, \pi]^n$ und kann daher als kompakte Teilmenge von $\mathbb{T}^n$ aufgefasst werden. Sei ψ durch Null auf $\mathbb{T}^n$ fortgesetzt, dann definiert $\tilde{F}(\varphi) = F(\psi \cdot \varphi)$ eine Distribution auf $\mathbb{T}^n$ mit Träger in K, welche auf $C_K(M)$ mit F übereinstimmt. Es genügt daher zu zeigen, daß $\tilde{F}$ von endlicher Ordnung ist. Da $\mathbb{T}^n$ selbst kompakt ist, kann man dazu obdA annehmen $K = M = \mathbb{T}^n$.

OBdA sei also F eine Distribution auf $M = \mathbb{T}^n$. Für jede Folge $\varphi_m \in C^\infty(M)$ mit $\lim_m \|\varphi_m\|_{C^k(M)} = 0$ für alle k gilt also $F(\varphi_m) \to 0$. Aus der Definition der Normen $\|.\|_{C^k(M)}$ folgt für $\varphi \in C^\infty(M)$

$$\boxed{\|\varphi\|_{C^k(M)} \ \leq \ \|\varphi\|_{C^m(M)} \quad , \quad (\forall\, m \geq k)}\ .$$

Lemma. *Sei $M = \mathbb{T}^n$. Für eine Distribution F auf M gibt es eine natürliche Zahl $k = k(F)$ und eine Konstante $C = C(F)$ so dass für alle $\varphi \in C^\infty(M)$ gilt*

$$|F(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|_{C^k(M)}\ .$$

F setzt sich zu einer stetigen Linearform auf $H^k(M)$ fort, weil $C^\infty(M)$ dicht in $H^k(M)$ liegt und auf $C^\infty(M)$ die Norm $\|.\|_{H^k(M)}$ äquivalent ist zu $\|.\|_{C^k(M)}$. D.h. es existiert eine natürliche Zahl $k = k(F)$ mit $F \ \in \ H^k(M)^*$. Wegen $H^\ell(M) \hookrightarrow H^k(M)$ für $\ell \geq k$ gilt

$$\boxed{F \ \in \ H^\ell(M)^*} \quad , \quad \forall\, \ell \geq k(F)\ .$$

Beweis. Wäre die Behauptung nicht richtig, existiert für jedes k und C ein $\varphi_{k,C} \in C^\infty(M)$ mit $|F(\varphi_k)| \ \geq \ C \cdot \|\varphi\|_{C^k(M)}$. Setze $C_k = k$ und $\varphi_k = \varphi_{k,C_k}$. OBdA dann $|F(\varphi_k)| = 1$ durch Multiplikation von φ_k mit einem Skalar, also $\|\varphi_m\|_{C^k(M)} \leq \|\varphi_m\|_{C^m(M)} \leq 1/m$ für alle $m \geq k$. Damit ist φ_m eine Schwartz Nullfolge. Es folgt $F(\varphi_m) \to 0$ im Widerspruch zu $|F(\varphi_m)| = 1$. QED

Beachte $F \in H^\ell(\mathbb{T}^n)^*$. Sei oBdA $\ell > \frac{n}{2}$. Die Paarung I_ℓ induziert einen Isomorphismus $H^\ell(\mathbb{T}^n)^* \cong H^{-\ell}(\mathbb{T}^n)$ und somit gilt für ein $\psi \in H^{-\ell}(\mathbb{T}^n)$

$$F(\varphi) \ = \ I_\ell(\varphi, \psi) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$$

Beachte $\psi = (1 + \Delta)^\ell f$ für ein $f \in H^\ell(\mathbb{T}^n)$. Wegen $\ell > \frac{n}{2}$ folgt aus dem Sobolev Einbettungssatz $H^\ell(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^n)$, also $f \in C(\mathbb{T}^n)$. Aus $F(\varphi) = I_\ell(\varphi, (1 + \Delta)^\ell f) = I_{-\ell}((1 + \Delta)^\ell \varphi, f) = F_f((1 + \Delta)^\ell \varphi)$ folgt daher $F = (1 + \Delta)^\ell F_f$ für die stetige Funktion $f \in C(\mathbb{T}^n)$. QED

Distributionen mit Träger in einem Punkt

.

Der Raum der Distributionen auf $\mathbb{R}^n$ mit Träger in einer abgeschlossenen Menge A ist ein $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-Modul und unter Ableitungen abgeschlossen [Gilt $F(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n \setminus A)$, dann gilt auch $\partial_i F(\varphi) = -F(\partial_i\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n \setminus A)$.]

Für einen Differentialoperator $D = \sum_{i\leq k} a_i \cdot \partial^i$ mit konstanten Koeffizienten a_i ist daher die Ableitung der Dirac Distribution

$$F = D(\delta_0)$$

eine Distribution mit **Träger im Nullpunkt**. Für das Ideal $m = (x_1, ..., x_n)$ im Ring $C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt ausserdem

$$\boxed{g \cdot F = 0} \quad \text{für alle } g \in m^{k+1} ,$$

d.h. F definiert eine Linearform auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)/m^{k+1}$. Da alle Ableitungen von $g \in m^{k+1}$ bis zum Grad k im Punkt Null verschwinden, folgt dies aus der Leibnitz Formel und $g \cdot F(\varphi) = \sum_{\nu=0}^k a_\nu (-1)^{|\nu|}\partial^\nu(g\varphi)(0) = 0$.

Umkehrung. Jede Distribution F mit der Eigenschaft $g \cdot F = 0$ für $g \in m^{k+1}$ ist von der Gestalt $F = D(\delta_0)$ für ein $D = \sum_{i\leq k} a_i\partial^i$ mit konstanten Koeffizienten [Taylor Approximation zeigt, daß $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ als Vektorraum von m^{k+1} und den Polynomen vom Grad $\leq k$ augespannt wird. Eine Distribution F mit der Eigenschaft $g \cdot F = 0$ für $g \in m^{k+1}$ ist daher durch ihre Werte auf den Polynomen vom Grad $\leq k$ bestimmt. Aus Dimensionsgründen folgt daraus $F = D(\delta_0)$ für ein D wie behauptet. In der Tat ist die Zahl linear unabhängiger Polynome vom Grad $\leq k$ und Differentialoperatoren D vom Grad $\leq k$ dieselbe.]

Lemma. *Die Distributionen F auf $\mathbb{R}^n$ mit Träger in einem Punkt $\{x_0\}$ sind gerade die Ableitungen $D(\delta_{x_0})$ der Dirac Distribution δ_{x_0} für Differentialoperatoren D mit konstanten Koeffizienten.*

Beweis. OBdA sei $x_0 = 0$. Für eine Distribution F mit Träger in 0 genügt es $g \cdot F = 0$ zu zeigen für alle $g \in m^l$ (und genügend großes l). Als Distribution ist F von endlicher Ordnung in einer Vollkugel K vom Radius $r > 0$, also $F(\varphi) = \int_K f(x)D(\varphi)(x)dx$ für einen Differentialoperator D vom Grad $\leq k$ und eine stetige Funktion f, zumindest für alle $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da F Träger in 0 hat gilt $F(\varphi) = F(\psi(\frac{x}{t})\varphi)$ für alle $0 < t < 1$ und jede Funktion $\psi \in C_K^\infty$, die konstant 1 in einer Umgebung von Null ist. Sei $g \in m^l$, dann gilt ebenfalls

$$g\cdot F(\varphi) = g\cdot F(\psi(\frac{x}{t})\varphi) = \int_{tK} f(x)D(\psi(\frac{x}{t})g(x)\varphi(x)))dx = t^n \int_K f(tx)D_t(\psi(x)g(tx)\varphi(xt))dx .$$

Für die Integration im ersten Integral ist oBdA $x \in supp(\psi(\frac{x}{t})) \subset t \cdot supp(\psi) \subset tK$. Wir können oBdA annehmen, daß g ein Monom vom Grad l ist, also $g(tx) = t^l g(x)$. Desweiteren hat $t^k D_t = \sum_{i \leq k} a_i t^{k-i} \partial^i$ konstante Koeffizienten, welche Polynome in t sind. Es folgt

$$|g \cdot F(\varphi)| \leq t^{l+n-k} \int_K |f(tx)| \cdot |(t^k D_t)(\psi(x) g(x) \varphi(tx))| dx \ .$$

Der Integrand kann für festes φ, g, ψ durch ein Polynom in t abgeschätzt werden. Im Limes $t \to 0$ folgt $|g \cdot F(\varphi)| = 0$, falls $l > k - n$. Für $l > k - n$ gilt daher $g \cdot F = 0$. QED

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{r^{n-2}} \in C^\infty(U)$ für $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ liegt in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Eine leichte Rechnung zeigt $\Delta f = 0$ auf U. Die Distribution $\Delta(F_{f \cdot dx})$ hat also Träger in $\{0\}$. Es gibt also ein k und Konstanten a_i mit

$$\Delta(F_{f \cdot dx}) = \sum_{i \leq k} a_i \cdot \delta_0^{(i)} \quad , \quad f = \frac{1}{r^{n-2}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Die linke Seite ist homogen vom Grad Null, denn Δ ist homogen vom Grad -2 und $(\frac{1}{r^{n-2}})dx$ ist homogen vom Grad 2. Die Summanden der rechten Seite sind homogen vom Grad $-i$. Der Vergleich zeigt $a_i = 0$ für $|i| > 0$. Das heisst die rechte Seite vereinfacht sich zu $a_0 \cdot \delta_0$ für eine Konstante a_0

$$\boxed{\Delta(F_{f \cdot dx}) = a_0 \cdot \delta_0 \quad , \quad f(x) = \frac{1}{r^{n-2}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)} \ .$$

Bemerkung[14]: Es gilt $a_0 = (n-2) vol(S)$ für das Volumen der Euklidschen Einheitssphäre S im $\mathbb{R}^n$. Beachte $vol(S) = n \cdot vol(E)$ für die Einheitskugel $E \subset \mathbb{R}^n$.

Faltung

Seien $g, f \in C^\infty(M)$ für $M = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{T}^n$. Besitzt eine der Funktionen f, g kompakten Träger auf M, dann ist die **Faltung** $g * f \in C^\infty(M)$ definiert durch

$$\boxed{(g * f)(x) \ := \ \int_M g(x-y) f(y) dy} \ .$$

Die Substitution $y \mapsto x - y$ zeigt $f * g = g * f$. Analog zeigt man $(f * g) * h = f * (g * h)$, falls mindestens zwei der drei Funktionen f, g, h kompakten Träger besitzen. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt leicht $\partial_i (g * f) = (\partial_i g) * f = g * (\partial_i f)$.

Ist $f \in C^\infty_c(M)$ und F eine verallgemeinerte Funktion auf M, dann ist die Faltung $F * f$ erklärt als Funktion (nota bene nicht als verallgemeinerte Funktion !) durch

$$\boxed{(F * f)(y) \ := \ F(h) \quad , \quad h(x) = f(y - x)} \ .$$

Insbesondere ist damit $F_{g \cdot dx} * f = \int_M g(x) f(y-x) dx$, also $F_{g \cdot dx} * f = g * f$.

Beispiel. Für die Dirac Distribution $F = \delta_0$ gilt $\delta_0 * f = f$.

---

[14] Es gilt $a_0 \varphi(0) = \int r^{2-n} (\Delta \varphi(x)) dx$ für alle $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Sei $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \psi(x) \leq 1$ konstant 1 für alle Punkte x mit $d(x, 0) \leq 1$. Beachte, $\varphi_m(x) = \psi(mx) exp(-r^2)$ konvergiert gegen $exp(-x^2)$ so dass $\int r^{2-n} (\Delta exp(-x^2)) dx = \lim_m \int r^{2-n} (\Delta \varphi_m(x)) dx = a_0$. Benutze $|\int r^{2-n} \Delta(1 - \varphi_m(x)) exp(-x^2)) dx| \leq \sum_{|i| \leq 2} |m^2 \int_{|x| \geq m} b_i(x) \Delta exp(-x^2)| dx$ für beschränkte stetige Funktionen $b_i(x)$ auf $\mathbb{R}^n$. In Polarkoordinaten gibt dies $-a_0 = vol(S) \int_{r>0} (4r^2 - 2n) exp(-r^2) r dr = vol(S) \int_{t>0} (2t - n) exp(-t) dt = (2 - n) vol(S)$.

Lemma. *Es gilt $F * f \in C^\infty(M)$ und $\partial_i(F*f) = F*(\partial_i f)$ für Distributionen F und $f \in C_c^\infty(M)$. Hat F ausserdem kompakten Träger, so ist $F * f \in C_c^\infty(M)$.*

Beweis. Sei $A = supp(f)$ der kompakte Träger von f und sei F eine Distribution mit kompaktem Träger K, dann ist der Träger von $(F*f)(y)$ enthalten in dem Kompaktum $K + A$. Die Glattheit von $F * f$ ist eine lokale Aussage und man kann daher $y \in A$ annehmen für ein geeignetes Kompaktum. Wegen $F = \sum_{i=0}^\infty F_i$ mit Distributionen F_i und $supp(F_i) \subseteq \{x \mid i \leq \|x\| \leq i+2\}$ (Partition der Eins) gilt $(F*f) = \sum_i (F_i * f)(y)$ und $(F_i * f)(y) = 0$ für fast alle i, falls $y \in A$. Daher ist oBdA $F = F_i$.

Habe also oBdA F kompakten Träger und damit ist oBdA $M = \mathbb{T}^n$. Unter dieser Annahme existiert ein $k \geq 2$ mit $|F(\varphi)| \leq const. \cdot \|\varphi\|_{C_K^k(M)}$. Es genügt jetzt zu zeigen, daß $F * f$ differenzierbar ist mit $\partial_i(F*f) = F*(\partial_i f)$, denn rekursiv folgt daraus dann $F*f \in C^\infty(M)$. Sei dazu $t_a(f)(x) = f(x+a)$. Es gilt[15]

$$\|f(y+a-x) - f(y-x) - df(y-x)\cdot a\|_{C_K^\ell(M)} \leq \|f\|_{C_K^{\ell+2}(M)} \cdot \|a\|_{Eukl}^2$$

für alle $\ell = 0,1,2,....$ Also $|(F*f)(y+a) - (F*f)(y) - F*(df\cdot a)| = |F(t_a(h) - h - dh\cdot a)| \leq const \cdot \|t_a(h) - h - dh\cdot a\|_{C_K^k(M)} \leq const \|f\|_{C_K^{k+2}(M)} \cdot \|a\|_{Eukl}^2$ für $h(x) = f(x-y)$. Der Limes $\|a\| \to 0$ existiert. Also ist $(F*f)(y)$ stetig diffenzierbar und $\partial_i(F*f) = F*(\partial_i f)$. QED

Benutzt man jetzt noch $\partial_i(F*f) = F(\partial_i h)$ für $\partial_i h(y) := (\partial/\partial y_i f)(y-x) = -\partial/\partial x_i f(y-x)$, folgt

$$\boxed{\partial_i(F*f) = F*(\partial_i f) = (\partial_i F) * f} \ .$$

Somit gilt $D(F*f) = DF*f$ für jeden Differentialoperator D mit konstanten Koeffizienten.

Beispiel. Für $F = F_{r^{2-n}\cdot dx}$ und $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$-\Delta(F*g) = (n-2)vol(S)\cdot g \ .$$

Übungsaufgabe. Zeige $(F*g)*f = F*(g*f)$ für Distributionen und $f, g \in C_c^\infty(M)$.

---

[15]OBdA $\ell = 0$ und $x = 0$. Beachte dazu dann $f(y+ta) - f(y) - df(y)\cdot ta = a'Hess(f)(\xi)a$ für ein $\xi \in M$, was man leicht auf den eindimensionalen Fall zurückführt. Den eindimensionalen Fall zeigt man durch zweimaliges Anwenden des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.